

TESIS DE DOCTORADO EN FÍSICA

**MODELOS DE QUARKS NO LOCALES PARA LA DESCRIPCIÓN
DE LA MATERIA DENSA EN EL NÚCLEO DE ESTRELLAS DE
NEUTRONES**

Mgter. Germán Malfatti
Doctorando

Dra. Milva Gabriela Orsaria
Director

Dr. Gustavo Aníbal Contrera
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Horacio Falomir, Dr. Marcelo Miller, Dr. Norberto Scoccola

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata
Buenos Aires, Argentina

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	vii
Índice de tablas	ix
Resumen	xi
Publicaciones asociadas	xiii
1. Introducción	1
2. Contexto astrofísico y materia de Quarks	7
2.1. Ecuaciones de estructura para estrellas de neutrones (TOV)	8
2.2. Estadios de las estrellas de neutrones y su relación con las ecuaciones de estado	11
2.3. Materia de quarks en objetos compactos	15
2.4. Ecuación de estado híbrida: transición de fase según los formalismos de Maxwell y de Gibbs	19
3. Modelo de quarks no local	25
3.1. Generalidades de QCD	25
3.2. Formalismo teórico del modelo NJL no local	29
3.3. Bosonización	30
3.4. Aproximación de Campo Medio	31
3.5. Aproximación de Fase Estacionaria	34
3.6. Diagonalización, ecuaciones del gap y Granpotencial a $T=0$	35

4. Modelo PNJL no local	39
4.1. Extensión a temperatura y potencial químico finitos	39
4.2. Regularización	42
4.3. Extensión al modelo PNJL-nl	46
4.3.1. El lazo de Polyakov	46
4.3.2. Inclusión del campo Φ en el modelo NJL-nl	49
4.4. Inclusión de interacciones vectoriales	51
4.5. Construcción del diagrama de fases	54
4.6. Inclusión de leptones	59
5. Superconductividad de color en el modelo de quarks no local	63
5.1. Diquarks como condensados de quarks	64
5.2. Neutralidad de carga eléctrica y de color para diquarks en estrellas de neutrones	70
6. Materia hadrónica y modelo DDRMF	75
6.1. Teoría de campo medio relativista dependiente de la densidad	76
6.2. Modelos RMF(L) y parametrizaciones utilizadas	80
6.3. Extensión a temperatura finita	81
7. Estrellas de neutrones con materia de quarks: resultados	87
7.1. Estrellas híbridas con transiciones de fase abruptas	88
7.2. Estrellas híbridas con transiciones de fase mixta	98
8. Conclusiones	103
A. Integrales fermiónicas para el modelo NJL	107
B. Cantidades termodinámicas para el modelo NJL-nl con superconductividad de color	111
B.1. Granpotencial regularizado con interacción vectorial y diquarks a $T = 0$.	111
B.2. Campos Auxiliares	112
B.3. Densidades	113
B.4. Sistema de ecuaciones a resolver	116
B.5. Granpotencial Regularizado Con interacción vectorial y diquarks a T finita	116
Bibliografía	119

Índice de figuras

1.1. Estructura esquemática de una estrella de neutrones	2
1.2. Diagrama de fases esquemático de la QCD	3
2.1. Distintos tipos de soluciones a las ecuaciones de TOV en el plano masa gravitacional-radio.	10
2.2. Curvas de masa gravitacional versus masa bariónica como soluciones de las ecuaciones de TOV.	12
2.3. Esquema de estadios de evolución de una estrella de neutrones.	13
2.4. Esquema de conversión de nucleones a hiperones.	16
2.5. Masa por nucleón del ^{56}Fe y de materia de quarks en la hipótesis de la materia extraña.	17
2.6. Construcción de ecuaciones de estado híbridas a lo Maxwell	21
2.7. Construcción de ecuaciones de estado híbridas a lo Gibbs.	22
4.1. Granpotencial y densidad en función del potencial químico bariónico para la construcción de la transición de primer orden del modelo de quarks. . .	55
4.2. Calor específico de quarks para la construcción de la transición tipo crossover. .	56
4.3. Diagramas de fases del modelo de quarks en el plano (T, μ) y (T, n_b)	57
4.4. σ_s y n_s en función de μ para distintos valores de acoplamiento vectorial. .	59
5.1. Ecuaciones de estado para la fase $2SC + s$ y la de materia normal de quarks (NQM).	72
5.2. Ecuación de estado, campo Δ y densidad n_s para distintos valores del acoplamiento vectorial.	73
6.1. Población de partículas en función de la densidad para las parametrizaciones DD2 y GM1L.	85

7.1. Construcción de EdE híbridas a lo Maxwell para las parametrizaciones elegidas.	89
7.2. Masas dinámicas M_i y densidades n_i de los quarks u, d, s en función del potencial químico bariónico	90
7.3. Masa gravitacional en función del radio y la densidad de energía con EdE híbridas sin superconductividad de color.	91
7.4. Masa gravitacional en función del radio y la densidad de energía con EdE híbridas con superconductividad de color.	92
7.5. Masa gravitacional M_G , en función del radio para la parametrización DD2 y $\zeta_V = 0,4$, con distintos valores de acoplamiento de diquarks.	93
7.6. M_G en función del radio para EdE a temperatura y/o entropía finitas. . . .	94
7.7. M_G en función de M_B para estadíos de proto-ENs.	96
7.8. Construcción de EdE híbridas y relación masa-radio para el modelo 2SC+s a temperatura finita.	97
7.9. Población de partículas para las estrellas híbridas con fase mixta.	99
7.10. M_G en función de M_B para distintos estadíos de estrellas construidas con transición tipo Gibbs.	100
7.11. Perfiles de temperatura en función de la densidad bariónica.	100
7.12. Perfiles de densidad de energía-masa y masa-radio para las estrellas híbridas con superconductividad de color.	101
7.13. M_G en función de M_B para estadíos de proto-estrellas y estrella fría con superconductividad de color.	102

Índice de tablas

5.1. Estructura de color y sabor de los distintos condensados de diquarks. . . .	65
6.1. Parámetros de los modelos RMF(L) con la parametrización GM1L y DDRMF con la parametrización DD2 utilizados en este trabajo.	82
6.2. Propiedades de la materia nuclear para las parametrizaciones GM1(L) y DD2.	83
7.1. Resultados de masa gravitacional y masa bariónica para las transiciones a lo Maxwell	92
7.2. Masa, radio y composición del núcleo para las (proto-) ENs con masa ba- riónica conservada $M_B = 2,36M_\odot$ para la parametrización GM1L.	95
7.3. Masa, radio y composición del núcleo para las (proto-) ENs con masa ba- riónica conservada $M_B = 2,43M_\odot$ para la parametrización DD2.	96
7.4. Masa, radio y composición del núcleo para las (proto-) ENs con masa ba- riónica conservada $M_B = 2,42M_\odot$ para la parametrización DD2 y fase mixta de hadrones y quarks.	102
7.5. Masa, radio y composición del núcleo para las (proto-) ENs con masa ba- riónica conservada $M_B = 2,36M_\odot$ para la parametrización GM1L y fase mixta de hadrones y quarks.	102

Resumen

Este trabajo de tesis se centra en estudiar la posible existencia de transiciones de fase en los remanentes compactos inmediatos del colapso del núcleo de supernovas, las estrellas de neutrones, y los modelos teóricos que describen la materia densa en su interior. Específicamente, nos interesa analizar la factibilidad de una transición de materia hadrónica a materia de quarks en el núcleo de estos objetos. La densidad de la materia en el interior de las estrellas de neutrones, supera varias veces a la de los núcleos atómicos, y la ecuación de estado que describe dicha materia en tal régimen aún es desconocida. En este contexto, es sabido que la interacción entre los constituyentes de los nucleones, los quarks, se debilita con el aumento de la densidad por la propiedad intrínseca de la QCD conocida como *libertad asintótica*. Por lo tanto, la materia debería disolverse en un estado de quarks casi libres a altas densidades, o bien formar un estado superconductor de color. Esta fase superconductora de color sería favorable energéticamente, si estuviera presente en una estrella de neutrones fría, dado que un sistema de fermiones que interactúan débilmente a baja temperatura es inestable con respecto a la formación de pares de Cooper. Aunque es imposible saber tanto teórica como experimentalmente si esas fases existen en las estrellas de neutrones, la interpolación de la parte resoluble de QCD de altas densidades junto con las ecuaciones de estado hadrónicas a bajas densidades, sugieren que las mismas podrían aparecer en el interior de objetos compactos. Para la transición de fase usaremos dos formalismos diferentes: el formalismo de Maxwell, en el cual se supone una transición de fase abrupta entre la materia hadrónica y de quarks sin formación de fase mixta, y el formalismo de Gibbs, en el que se forma una fase mixta en la que coexisten hadrones y quarks. Para la descripción de la materia hadrónica, utilizaremos diferentes parametrizaciones del modelo de campo medio relativista con constantes de acoplamiento dependientes de la densidad. Para la descripción de la materia de quarks utilizaremos un modelo efectivo Nambu Jona-Lasinio no local de tres sabores con interacciones vectoriales, en el que incluiremos la posibilidad de formación de diquarks para modelar una fase superconductora de color en $SU(3)$, que llamaremos $2SC + s$. Se presentan diagramas de

fase y ecuaciones de estado de la materia de quarks a temperatura finita, y se investiga la influencia de dicha materia en observables asociados con estrellas de neutrones. Asimismo, utilizando ecuaciones de estado híbridas, se estudia la evolución térmica simplificada de estrellas compactas durante su formación, desde su estado de proto-estrellas de neutrones hasta el de estrellas de neutrones frías, y se comparan los resultados obtenidos con observaciones astrofísicas recientes. Las parametrizaciones utilizadas en este trabajo se ajustan a las mediciones más recientes de masas y constantes de acoplamiento de la QCD, lo cual impone fuertes restricciones a la existencia de materia de quarks en las proto-estrellas, a diferencia de lo que sucede con modelos menos realistas o con más parámetros libres. Sin embargo, los resultados obtenidos indican que aún considerando dichas restricciones, la ocurrencia de materia de quarks en los núcleos de estas estrellas sigue siendo una posibilidad promisoría. Los parámetros libres restantes de los modelos se ajustaron teniendo en cuenta las restricciones observacionales, provenientes de determinaciones precisas de las masas de pulsares de $\sim 2 M_{\odot}$, y del evento de la fusión de dos estrellas de neutrones, conocido como GW170817. El hecho de que el uso de modelos más realistas para la descripción de la materia densa en estos objetos indiquen la presencia de materia de quarks en el interior de estrellas de neutrones, podría ser una respuesta al interrogante del comportamiento de dicha materia y la determinación de su correspondiente ecuación de estado.

Publicaciones asociadas

1. **Quark-hadron Phase Transition in Proto-Neutron Stars Cores based on a Non-local NJL Model**, G.Malfatti, M.G.Orsaria, G.A.Contrera, F.Weber. Feb 20, 2017. 5 pp, Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. **45**, 1760039 (2017), doi:10.1142/S2010194517600394, [arXiv:1702.06114 [astro-ph.HE]].
2. **Effects of Hadron-Quark Phase Transitions in Hybrid Stars within the NJL Model**, I.F.Ranea-Sandoval, M.G.Orsaria, G.Malfatti, D.Curin, M.Mariani, G.A.Contrera, O.M.Guilera. Mar 27, 2019. 18 pp. Symmetry **11**, no. 3, 425 (2019), doi:10.3390/sym11030425, [arXiv:1903.11974 [nucl-th]].
3. **Phases of Hadron-Quark Matter in (Proto) Neutron Stars**, F.Weber, D.Farrell, W.M.Spinella, M.G.Orsaria, G.A.Contrera, I.Maloney. Jul 10, 2019. 16 pp. Universe **5**, no. 7, 169 (2019), doi:10.3390/universe5070169, [arXiv:1907.06591 [nucl-th]].
4. **Hot quark matter and (proto-) neutron stars**, G.Malfatti, M.G.Orsaria, G.A.Contrera, F.Weber, I.F.Ranea-Sandoval. Jul 5, 2019. 27 pp, Phys. Rev. C **100**, no. 1, 015803 (2019), doi:10.1103/PhysRevC.100.015803, [arXiv:1907.06597 [nucl-th]].

Capítulo 1

Introducción

El colapso del núcleo de supernovas constituye una de las explosiones más energéticas observadas en el Universo, pudiendo eclipsar una galaxia entera por un breve instante. Sus posibles restos, las llamadas estrellas de neutrones (EN), representan los objetos estables más densos (además de los agujeros negros) conocidos, con masas de $\sim 1.4 M_{\odot}$ y radios ~ 10 km. Muchas EN son radiopúlsares, que emiten ondas de radio en forma periódica y tienen velocidades de rotación muy altas, con períodos del orden de milisegundos. Los púlsares también pueden emitir rayos X o rayos γ y poseer campos magnéticos extremos. Algunas EN, conocidas como magnetares, tienen campos magnéticos superficiales de $10^{14} - 10^{15}$ Gauss ([1] y referencias allí mencionadas).

La descripción de la materia en condiciones tan extremas es un problema aún no resuelto para la comunidad astrofísica. En los últimos diez años, los descubrimientos de EN con masas alrededor de $2 M_{\odot}$ [2, 3, 4] representaron un fuerte desafío a la hora de construir las ecuaciones de estado (EdE) que describen estos objetos. Las EdE que se usaban hasta ese momento no llegaban a describir masas de ese orden, por lo cual fue necesario empezar a considerar grados de libertad adicionales para describir la materia en el interior de las EN. Asimismo, el evento histórico conocido como GW170817, la primera detección de ondas gravitacionales a partir de la fusión de dos EN el 17 de agosto de 2017 [5], también estableció nuevos desafíos teóricos para la construcción de la EdE de la materia en el interior de estos objetos compactos.

Las densidades en los núcleos internos de las EN pueden ser superiores a la densidad de saturación de los núcleos atómicos ($\sim 2.3 \times 10^{14}$ g/cm³), y estas condiciones no son accesibles en los laboratorios terrestres. Por eso, el estudio de la composición de los núcleos internos de estos objetos se basa, en la mayoría de los casos, en conjeturas teóricas. La imagen tradicional de una EN incluye materia compuesta principalmente de neutrones con

una pequeña fracción de protones y electrones. Aún en esta imagen simple, la estructura interna de estos objetos está lejos de ser uniforme: se espera que aparezcan capas de protones y neutrones superconductores en el núcleo externo, y gas uniforme de nucleones entre dicho núcleo y la corteza interna de la estrella. Otras configuraciones aún más exóticas como la formación de estructuras geométricas conocida como *nuclear pasta* [6] pueden aparecer en regiones de transición en el interior de la estrella. Además, a densidades comparables o mayores a la densidad de la materia nuclear, a medida que nos acercamos al núcleo interno, podrían aparecer fases exóticas que incluyan hiperones, condensados mesónicos y materia de quarks. Una representación esquemática de una EN se muestra en la Figura 1.1. En particular, desde el descubrimiento de la subestructura de los nucleones formados por quarks [7], en muchos trabajos se ha conjeturado la aparición de una fase de quarks desconfiados en el núcleo interno de estos objetos. La existencia de la materia de quarks en el interior de las EN es de particular interés para este trabajo de tesis.

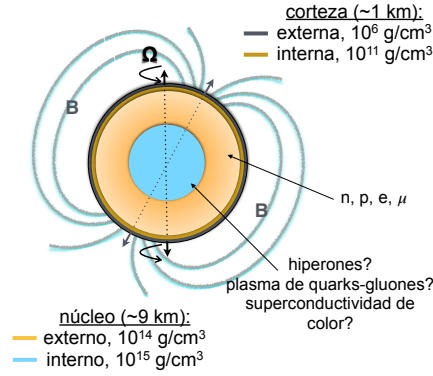


Figura 1.1: Estructura esquemática de una estrella de neutrones. Figura adaptada del trabajo de F. Weber [8].

En este sentido, el estudio y la comprensión de la cromodinámica cuántica (QCD), la teoría que describe las interacciones fuertes, y sus características es fundamental para entender tanto la naturaleza de las EN como el Universo primordial.

Una de las principales características de la QCD es la libertad asintótica. Contrariamente a la mayoría de los campos de la física (por ejemplo, la electrodinámica cuántica), las interacciones son débiles siempre que se consideren solo distancias cortas ($\sim 0.4 \text{ fm}$) entre los quarks y se vuelven más fuertes a medida que la distancia entre ellos aumenta. Calculada a primer orden por Gross, Wilczek y Politzer en 1973 [9, 10], la confirmación experimental de la libertad asintótica hizo posible que la QCD fuera aceptada como la teoría que describe a las interacciones fuertes. Por lo tanto, en el régimen de distancias cortas, la

QCD puede tratarse perturbativamente. Sin embargo, en el régimen de distancias largas o, equivalentemente de bajas energías ($\lesssim 1$ GeV), la teoría se vuelve no-perturbativa y los cálculos no son matemáticamente factibles. En este contexto, los problemas que tiene la QCD en el régimen no-perturbativo se abordan o bien a través de cálculos *ab initio* mediante *Lattice QCD* [11], o bien construyendo un modelo efectivo que comparte, para un cierto problema, algunas propiedades fundamentales de la QCD mientras conserva una estructura matemática más simple. Sin embargo, estos dos abordajes tienen serias limitaciones. *Lattice QCD* no puede describir la teoría a potenciales químicos finitos debido al problema del signo o problema de la Acción compleja [12], mientras que la mayoría de los modelos efectivos solo son capaces de reproducir QCD cualitativamente. Dado que en esta tesis nos interesa analizar cantidades y propiedades termodinámicas con potencial químico finito usaremos un modelo efectivo no local para la descripción de la materia de quarks y sus diferentes fases consideradas en el marco de las EN, el cual no solo reproduce cualitativamente propiedades de la QCD, sino que también respeta varias simetrías fundamentales de la teoría.

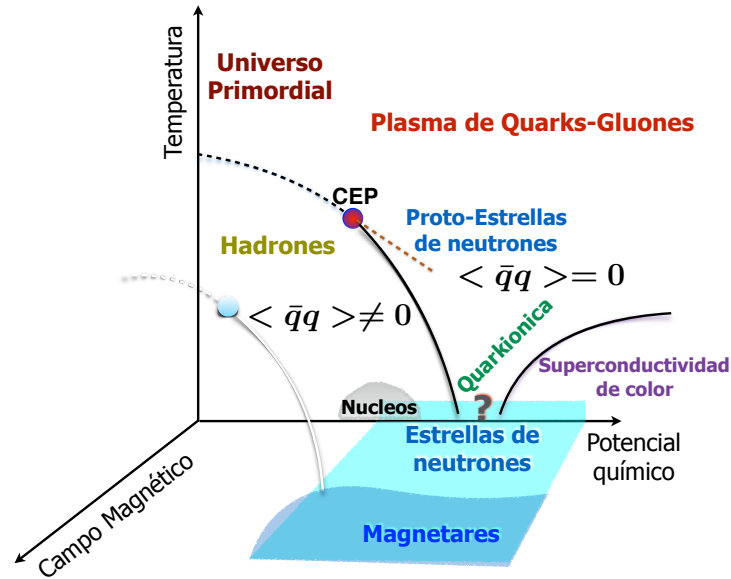


Figura 1.2: Diagrama de fases esquemático de la QCD. Figura adaptada del trabajo de la referencia [1].

El diagrama de fases esquemático de la QCD en la Figura 1.2 ilustra las diferentes fases teóricas de la materia de quarks a una temperatura y un potencial químico determinados. Los cálculos *ab-initio* de *Lattice QCD* indican que a un potencial químico bariónico

pequeño y a alta temperatura, la transición de la fase de un gas de hadrones a la fase de plasma de quarks y gluones es un cruce suave, denominada crossover. Por otro lado, se espera una transición de fase de primer orden en la región de potenciales químicos bariónicos altos. Ambas fases se encuentran separadas por una curva principal en la que se encuentra la transición, en la que los estados confinado y desconfinado están en equilibrio. El punto indicado en la Figura con la sigla CEP (*Critical End Point* en inglés), separa la línea de crossover de la de primer orden. La curva secundaria separa la región del diagrama de fases con el signo de interrogación de la fase superconductora de color. Dicho signo se refiere a que aún se desconoce, desde el punto de vista teórico, qué fase de materia de quarks se encontraría en esa zona de bajas temperaturas y altas densidades y/o potenciales químicos. Una fase superconductora de color podría estar presente en el interior de una EN fría, dado que un sistema de fermiones que interactúan débilmente a baja temperatura es inestable con respecto a la formación de pares de Cooper. La fase quarkiónica, en la cual ocurriría una restauración solo parcial de la simetría quiral, también se muestra como una alternativa posible. Existe gran incertidumbre en los cálculos teóricos para determinar cual es la estructura del diagrama de fase de la QCD en la región de densidades bariónicas más altas. Encontrar la naturaleza de la transición de fase de la QCD y el punto crítico correspondiente en dicha región son los objetivos principales de los programas Beam Energy Scan (BES) en el Relativistic Heavy-Ion Collider (RHIC)[13] y en el Super-Proton Synchrotron (SPS) [14]. Respecto a la región de la Figura 1.2 de densidades más altas, donde yace la materia en condiciones similares a las que se encuentra en el interior de las EN o de magnetares, se espera que los resultados de misiones espaciales tales como NICER, Neutron star Interior Composition Explorer¹, o Strobe-X² nos permitan determinar completamente la ecuación de estado de la materia ultra densa. En esta tesis, estudiaremos las propiedades termodinámicas de modelos no locales en todo el diagrama de fases y lo aplicaremos al estudio de posibles transiciones de fase que puedan ocurrir en la zona donde se ubicaría el estado de la materia en el interior de las EN (Figura 1.2).

Con respecto a los modelos no locales, en la década del 90, se comenzó a incluir interacciones no locales entre los quarks en el tratamiento de la materia mediante modelos efectivos de la QCD de tipo Nambu Jona-Lasinio (NJL) [15]. El modelo NJL[16] fue utilizado inicialmente para estudiar las propiedades de los hadrones y luego se generalizó al estudio de la materia de quarks. Una forma natural de introducir la no localidad en la interacción quark-quark consiste en utilizar un propagador de gluones fenomenológicamente

¹<https://www.nasa.gov/content/about-nicer>

²<https://gammaray.nsstc.nasa.gov/Strobe-X/>

modificado (propagador efectivo) [17]. El hecho de incluir la no localidad, soluciona las divergencias en las auto-energías de los quarks y las masas mesónicas que ocurren en el modelo NJL estándar. Otro rasgo característico del modelo NJL estándar es la ausencia de confinamiento. Con el fin de describir tanto la ruptura espontánea de la simetría quiral como el confinamiento de color que ocurren en la QCD, se propusieron los modelos Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) como una extensión de la teoría NJL original. El lazo o *loop* de Polyakov, en una teoría de calibre (también conocidas como teorías de *gauge*) pura, es un parámetro de orden de la transición de fase de desconfinamiento [18, 19]. Esta peculiaridad está relacionada con la existencia de una simetría discreta, Z_3 , de la acción de calibre puro, que se rompe espontáneamente cuando se inicia el desconfinamiento. El lazo de Polyakov desaparece en la fase confinada de baja temperatura pero es diferente de cero en la fase desconfiada, a altas temperaturas.

Tenemos entonces, que los problemas debido a las divergencias ultravioletas y al confinamiento, que surgen naturalmente en los modelos NJL, pueden resolverse con el uso de interacciones no locales y la inclusión del lazo de Polyakov. Los modelos de quarks quirales no locales son capaces de proporcionar una descripción satisfactoria de las propiedades de los hadrones a temperatura cero [20]. Sin embargo, para un potencial químico nulo, estos modelos conducen a una temperatura crítica bastante baja (del orden de 120 MeV) para la transición de fase quiral en comparación con los resultados de *Lattice QCD*. Este problema se resuelve incorporando el lazo de Polyakov, lo cual aumenta significativamente la temperatura de restauración de la simetría quiral [21].

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 2, damos una introducción al contexto astrofísico en el que serán aplicados nuestros modelos de quarks no locales (NJL-nl). Las generalidades de QCD y el formalismo teórico para el caso de los tres sabores más livianos de quarks en el modelo NJL-nl, se presentan en el Capítulo 3. El Capítulo 4 está dedicado a la extensión del modelo a temperatura finita y a la incorporación del lazo de Polyakov, PNJL-nl. La inclusión de la superconductividad de color a temperatura cero y su extensión a temperatura finita se desarrolla en el Capítulo 5. En el Capítulo 6 se describe el modelo utilizado para la materia hadrónica que compondrá el núcleo externo de las EN. Los resultados de la aplicación astrofísica de los modelos efectivos presentados en esta tesis se muestran y discuten en el capítulo 7. Finalmente, en el capítulo 8 presentamos las conclusiones y perspectivas futuras de la aplicación de este tipo de modelos en el contexto astrofísico.

Capítulo 2

Contexto astrofísico y materia de Quarks

Las EN son los objetos astrofísicos compactos más densos del universo ($10^6 \text{ g/cm}^3 \lesssim \rho \lesssim 10^{15} \text{ g/cm}^3$) [22], después de los agujeros negros. Ambos surgen como consecuencia de explosiones supernova de una estrella masiva. Estos objetos constituyen laboratorios naturales que permiten investigar la influencia de campos magnéticos intensos, la superfluidez y la superconductividad en la materia sometida a condiciones extremas, las propiedades de las fuerzas nucleares a altas densidades y las posibles transiciones de fase de la materia nuclear hacia otro tipo de materia más exótica, como la materia de quarks desconfiada o en un estado superconductor de color. Respecto a la materia de quarks desconfiada, en los años 80 surge la llamada conjetura de Bodmer-Witten [23, 24], la cual sugiere que una forma de materia de quarks conocida como materia extraña (*strange quark matter*) sería el estado fundamental de las interacciones hadrónicas. A partir de esta conjetura, surgieron varios estudios de estrellas compuestas únicamente por materia de quarks [25, 26, 27]. Más tarde, estudios teóricos mostraron que el estado fundamental de la materia de quarks desconfiada podría ser superconductor de color [28]. Sin embargo, estudios detallados en el marco de modelos tipo Nambu Jona-Lasinio, cuestionan la estabilidad absoluta de la materia de quarks, ya sea en la forma de plasma de quarks-gluones o en una fase superconductora de color [29]. Discutiremos más en detalle este punto en la sección 2.3.

Si bien la gravedad en las ENs comprime la materia a densidades de energía comparables a las alcanzadas en colisiones de iones pesados, en las que es factible la formación de un plasma de quarks y gluones, aún es una incógnita la existencia de materia de quarks en sus núcleos internos. Esto depende de que las densidades en el centro de estos objetos sean suficientemente extremas como para conducir a la formación de un nuevo estado de

materia no confinada. Aunque la última década ha sido testigo de avances notables en las observaciones de ENs, lo que ha obstaculizado conclusiones firmes sobre la presencia de materia de quarks en el interior de estos objetos es la falta de predicciones precisas de la QCD para las propiedades de la materia a altas densidades bariónicas. Lo que sí es claro es que tanto los estudios teóricos como experimentales de la QCD indican que al menos dos fases son claramente identificables por el comportamiento cualitativo de la ecuación de estado de la materia densa: a bajas densidades la ecuación de estado de la QCD sigue las predicciones de modelos hadrónicos y a altas densidades la descripción es compatible con modelos perturbativos de la QCD. Esta situación no debería, en principio, ser diferente en el contexto de una EN. Asimismo, aún no se descarta la existencia de estrellas formadas solamente por materia de quarks [30, 31, 32]. Otra posibilidad es que las ENs estén formadas por un núcleo de materia de quarks desconfiada, o formando diquarks en una fase superconductora de color, rodeado de varias capas de materia hadrónica. Este tipo de estrellas se conocen como estrellas híbridas. También podría existir una fase mixta donde estuvieran presentes quarks y hadrones al mismo tiempo, ya que una tensión superficial suficientemente pequeña ($\lesssim 70 \text{ MeV/fm}^2$) entre las interfaces hadrónica y de quarks, favorecería la formación de dicha fase [33]. Sin embargo, aún se desconoce el valor de la tensión superficial y esto ha dado lugar a varios estudios que muestran resultados contrapuestos (ver, por ejemplo [34] y sus referencias).

Como vimos en la introducción, la estructura interna de las ENs se divide en varias regiones o capas. Por ello, el modelado de estos objetos desde que nacen, en su etapa de proto-estrellas, hasta que se enfrían, requiere tener en cuenta no solo los procesos físicos de transporte que ocurren en su interior, sino también analizar su estructura y estabilidad hidrostática. Si bien la mayoría de ENs se encuentran en sistemas binarios, se han detectado también ENs aisladas como por ejemplo las que se conocen comúnmente como "los 7 magníficos" (*XINS: X-ray Isolated Neutron Stars*) [35]. En este trabajo consideraremos estrellas de neutrones esféricamente simétricas, estáticas y aisladas en un proceso que puede ser descrito en forma simple a través de distintos estadios de entropía por barión constante, como describiremos más adelante en la sección 2.2.

2.1. Ecuaciones de estructura para estrellas de neutrones (TOV)

Desde el descubrimiento de los púlsares en 1967 por Jocelyne Bell [36] (lo cual permitió obtener el premio Nobel a su director, Antony Hewish en 1974), las ENs han sido objeto de intensos estudios, tanto desde el punto de vista de las observaciones astronómicas como

desde el punto de vista teórico. La primera especulación teórica sobre la existencia de un objeto extremadamente denso con una composición similar a la de los núcleos atómicos provino de Lev Landau en 1931[37]. El descubrimiento de los neutrones al año siguiente[38] proporcionó un apoyo adicional a la conjetura de Landau, ya que un objeto compuesto de partículas neutras no sufriría el problema de estabilidad como consecuencia de la repulsión electrostática. En el año 1934, los astrónomos Fritz Zwicky y Walter Baade propusieron objetos compuestos de materia neutrónica pura como un remanente de una explosión de supernova [39]. Uno de los hechos cruciales para comprender la física de las ENs, fue la formulación de ecuaciones de equilibrio hidrostático de un fluido autogravitante en el marco de relatividad general. Dicha formulación fue completada independientemente por Oppenheimer y Volkoff [40] y por Tolman [41]. Las ecuaciones correspondientes se conocen como las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Para resolverlas, se necesita la EdE de la materia que compone dicho fluido.

La relación entre la densidad de masa o energía y la presión en el interior de la EN es lo que determina su EdE. De esta manera, para cada EdE, es posible calcular una familia de ENs con una masa y un radio bien determinados que dependerán del modelo o los modelos elegidos para describir la materia en el interior de estos objetos. Combinando las ecuaciones de TOV y la EdE podemos calcular la estructura de cada estrella que compone la familia correspondiente. Las TOV se obtienen de resolver las ecuaciones de relatividad general para una métrica que describa un fluido estático no rotacional con simetría esférica. Partiendo de una métrica que respete esas condiciones, y asumiendo que la materia dentro de la esfera es isotrópica y se encuentra en equilibrio gravitacional, se obtiene

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\epsilon(r)}{r^2} \frac{\left[1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)}\right] \left[1 + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{m(r)}\right]}{\left[1 - 2G\frac{m(r)}{r}\right]}, \quad (2.1)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r), \quad (2.2)$$

donde r es el radio, $P(r)$ y $\epsilon(r)$ son la presión y densidad de energía en un radio r , $m(r)$ es la masa contenida en ese radio y G es la constante de gravitación universal. Usualmente estas ecuaciones se resuelven con buena precisión empleando métodos Runge Kutta de orden 4. Dando una relación $\epsilon(p)$, las condiciones de borde a satisfacer para encontrar relaciones de masa-radio son: $m(r=0) = 0$ y $p(r=R) = 0$ para algún valor de R que será el punto límite de la integración para el cual, si se cumple esta condición, estaremos en el borde de la estrella. Una vez resueltas estas ecuaciones, podemos llegar, dependiendo de la EdE $\epsilon(p)$ de la que partamos, a relaciones masa-radio como las de la Figura 2.1.

Dependiendo del tipo de EdE proporcionada, podemos ver que es posible obtener radios

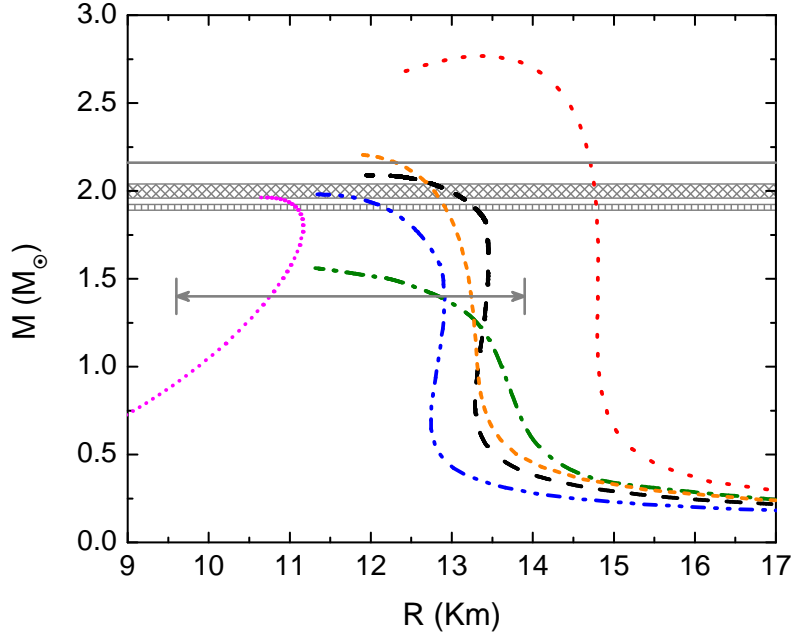


Figura 2.1: Soluciones de las ecuaciones de TOV en el plano masa-radio para distintas EdE. Las barras en gris son las restricciones impuestas por los pulsares de $2M_{\odot}$. La línea superior inmediata a las barras indica la restricción proveniente del análisis de los datos obtenidos a partir del evento GW170817, que impone un límite para la masa máxima de ENs de $2.16 M_{\odot}$ [42]. La línea inferior con doble flecha indica la restricción a los radios de las ENs provenientes del análisis de datos del mismo evento de la fusión de dos ENs (ver [5] y [1] y sus referencias).

arbitrariamente pequeños (para el caso de estrellas puramente formadas por materia de quarks extraña) o curvas de masa radio que llegan hasta un límite inferior de radios. En este último caso, la estrella que corresponde al punto máximo de masa es la última estrella estable de la familia, siendo las de radios menores inestables hidrostáticamente, y posiblemente candidatas a convertirse en agujeros negros. Sin embargo, hay trabajos que proponen que estas inestabilidades podrían salvarse, dependiendo del tiempo de nucleación en relación a la frecuencia de oscilación radial de la estrella, si ocurriera una transición de fase abrupta de materia hadrónica a materia de quarks en su interior [43]. Cabe destacar que si bien uno puede ingresar en las ecuaciones de TOV distintas ecuaciones de estado, hay restricciones generales que se tienen que cumplir, a saber:

- Causalidad: $\frac{dp}{d\epsilon} < c^2$, donde c es la velocidad de la luz.

- Estabilidad termodinámica: $\frac{dp}{d\epsilon} > 0$.

En el siguiente capítulo desarrollaremos con más detalle las condiciones que imponemos a las ecuaciones de estado. Por lo pronto, vale la pena mencionar que la condición de causalidad da un límite superior en el plano masa-radio, que resulta en $M \lesssim 0,35R$, el cual es menor que el límite de Schwarzschild $M = 0,5R$. Es decir, que es posible construir EdE que violen causalidad antes de llegar al límite de Schwarzschild.

Hasta aquí hemos discutido sobre la masa gravitacional (que siempre expresaremos en términos de masas solares M_\odot), la cual se define como

$$M_G = \int_0^R 4\pi r^2 \epsilon(r) dr. \quad (2.3)$$

Es útil, sin embargo, definir la masa bariónica de la estrella:

$$M_B = m_N \int_0^R \frac{4\pi r^2 n_B(r)}{\sqrt{1 - \frac{2Gm(r)}{r}}} dr, \quad (2.4)$$

donde m_N es la masa del neutrón, y $n_B(r)$ es la densidad bariónica para un radio r . Esta cantidad puede ser calculada si para cada punto $\epsilon(p)$ también ingresamos $n_B(p)$. Una vez calculada la masa bariónica, es posible realizar curvas en el plano (M_G, M_B) , como el de la Figura 2.2. Estas curvas nos serán de utilidad por el siguiente argumento: si suponemos que las estrellas a analizar están aisladas, la masa bariónica se tiene que conservar durante su evolución. Por lo tanto, si tenemos estadíos de la estrella calculados a distintas temperaturas, la condición a pedir es que todas las estrellas que calculemos caigan en una recta sobre un valor definido de masa bariónica. Por ejemplo, si nuestra estrella a estudiar a temperatura cero tiene un valor de masa bariónica de $M_B = 2,4M_\odot$ pero las estrellas calculadas a temperatura finita nunca alcanzan dicho valor, no serán posibles candidatas a predecesoras de dicha estrella por no cumplir conservación de masa bariónica.

2.2. Estadíos de las estrellas de neutrones y su relación con las ecuaciones de estado

Hasta aquí hemos presentado las ecuaciones de estructura de las estrellas de neutrones, en donde dijimos que necesitamos como ingrediente primario una ecuación de estado que nos de la relación $\epsilon(p)$ para resolver las ecuaciones de TOV. Sin embargo, dependiendo de la clase de objeto compacto que querramos estudiar y su composición interna, las

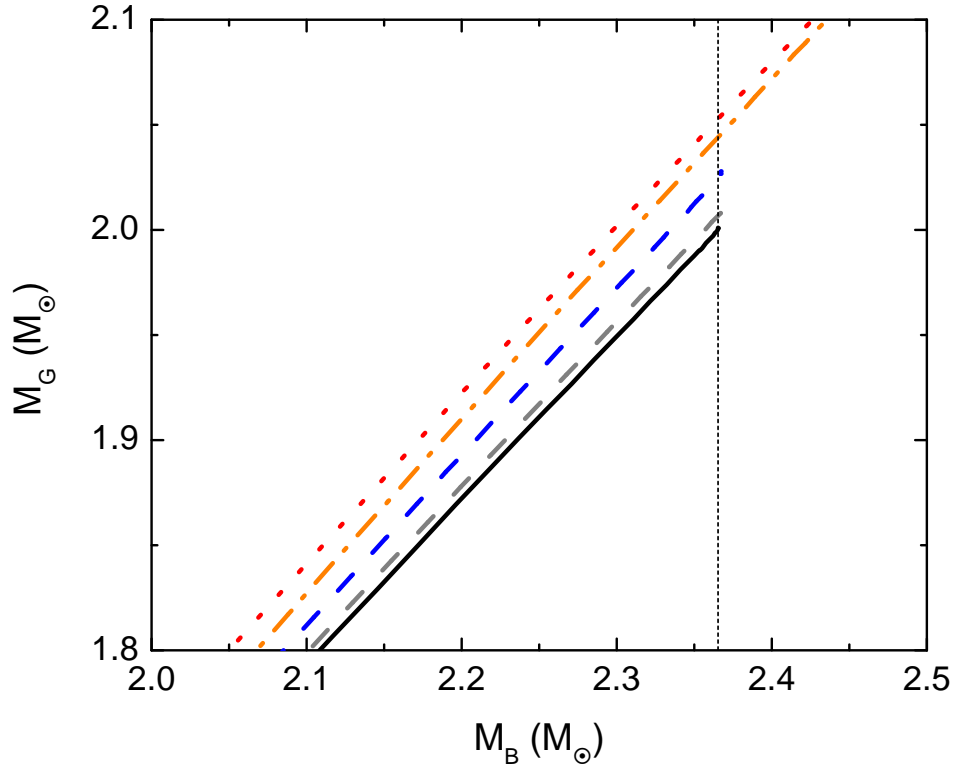


Figura 2.2: Curvas de masa gravitacional en función de la masa bariónica para distintas temperaturas, la línea negra sólida corresponde a temperatura cero, la línea vertical indica el valor de masa bariónica que deberían conservar las estrellas que sean candidatas a predecesoras de la estrella fría.

EdE que podemos utilizar como ingrediente pueden ser de distintos tipos: isotérmicas, isoentrópicas, con y sin neutrinos, con y sin quarks, etc. Para determinar qué EdE es la adecuada, debemos tener en cuenta los distintos estadios en la evolución de las ENs y qué restricciones imponen éstos sobre las condiciones de la materia que dichas EdE representan. Por ello, a continuación describiremos esquemáticamente el proceso de formación de las ENs.

Una vez que una estrella se queda sin combustible para consumir, implosiona pues ya no existe presión de las reacciones nucleares que pueda contrarrestar la presión gravitatoria. Como el contenido que queda en la estrella son mayormente fermiones, el colapso llega a un punto donde no existen diferentes estados para cada partícula (por principio de exclusión de Pauli), y se genera un efecto rebote del manto externo de la estrella colapsando contra el núcleo. En este estadio queda un núcleo de baja entropía en donde hay neutrinos atrapados (estadio (1) en la Figura 2.3). El núcleo queda rodeado por un manto de baja densidad y alta entropía, que se encuentra acretaando materia del núcleo externo

de hierro y a la vez va perdiendo energía debido procesos de captura electrónica y emisión de neutrinos térmicos. Este manto se extiende por alrededor de 200 Km y es aproximadamente estable antes de una eventual explosión debida al rebote mencionado. Luego de este

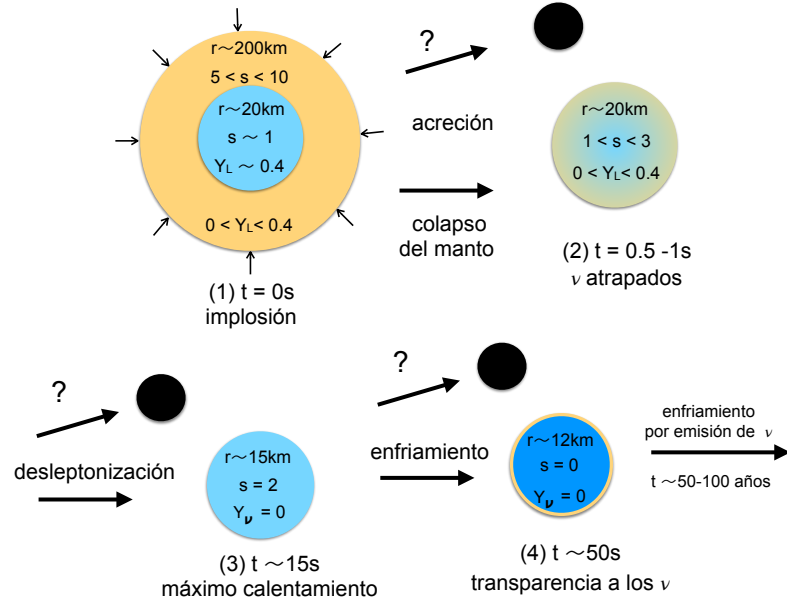


Figura 2.3: Esquema de los estadíos de evolución de una estrella de neutrones considerados en este estudio (basado en la referencia [44]).

estadio pueden pasar dos cosas: la explosión no es suficientemente fuerte para deleptonizar el manto externo, y la materia se vuelve a acretar, dando paso a la formación de un agujero negro, o la supernova explota, generando una pérdida de presión importante en el disco por deleptonización, el manto colapsa, y la acreción se vuelve menos importante (estadio (2)). El tercer estadio se produce cuando la estrella empieza rápidamente a perder neutrinos. Esto lleva a una reducción en su presión por deleptonización, y también aquí es posible que se convierta en un agujero negro si la presión gravitatoria es lo suficientemente grande. Si esto no sucede, la estrella terminará de deleptonizarse mientras se calienta por el efecto Joule de los neutrinos que escapan y llegará al estadio 3. Se cree que una vez que los neutrinos terminaron de escapar es cuando se produce el máximo calentamiento de la estrella, pero distintos análisis de los resultados que veremos al final de esta tesis nos permiten reconsiderar esa afirmación. Luego del escape de los neutrinos, la probabilidad de ocurrencia de materia extraña se incrementa. En la sección siguiente analizaremos esta hipótesis, pero cabe mencionar que si la producción de materia extraña es suficientemente grande, existe nuevamente la posibilidad de colapso a un agujero negro. Si esto no ocurre,

a menos que haya acreción esta posibilidad queda descartada para los estadios siguientes. Si el colapso no sucede, la estrella continúa enfriándose y se hace transparente a los neutrinos (estadio (4)). Para todos los fines prácticos de este trabajo (recordemos que no analizaremos efectos de transporte), los siguientes estadios corresponden a la estrella fría, a entropía y temperatura nulas.

Para los primeros estadios, donde hay neutrinos atrapados, la materia se encuentra en equilibrio beta, lo que junto con la conservación de carga implica que [45]:

$$\mu_e - \mu_{\nu_e} = \mu_\mu - \mu_{\nu_\mu}, \quad (2.5)$$

$$\mu_B = b_i \mu_N - q_i \mu_e + q_i \mu_{\nu_e}, \quad (2.6)$$

donde b_i y q_i son el número bariónico y la carga eléctrica del hadrón o quark correspondiente y μ_N es el potencial químico del neutrón. Ignoraremos efectos de Coulomb y de superficie, por lo cual los leptones serán considerados como gases de Fermi libres. Las fracciones leptónicas se definen como

$$Y_{L_e} = \frac{n_e + n_{\nu_e}}{n_B} = X, \quad (2.7)$$

$$Y_{L_\mu} = \frac{n_\mu + n_{\nu_\mu}}{n_B} = 0, \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

donde Y_L es la fracción de la especie de partículas i , n_i la densidad y X es un número a fijar dependiendo del estadio a considerar. La fracción de muones se toma como nula por estar suprimida mientras existen neutrinos de electrón, y se vuelve distinta de cero luego de la deleptonización, donde por las mismas razones de equilibrio mencionadas anteriormente resulta $\mu_\mu = \mu_e$.

En este trabajo utilizaremos los estadios mencionados como una primera guía para establecer qué condiciones le pediremos a nuestras EdE. En principio necesitaríamos cumplir con los siguientes requisitos:

- Entropía o temperatura fija.
- Inclusión de leptones como gas de Fermi libre.
- Fracción leptónica fija en el caso de incluir neutrinos.
- Descripción de materia hadrónica y materia de quarks.
- Posibilidad de transición de fase entre la materia hadrónica y de quarks (materia híbrida).

Como dijimos anteriormente, al aumentar la densidad de la estrella la probabilidad de aparición de materia extraña aumenta, lo que nos lleva a la necesidad de las EdE que contengan quarks s para la materia de quarks, y que contengan hiperones en la descripción de la materia hadrónica. Veamos en la sección siguiente las razones de esta hipótesis un poco más en detalle.

2.3. Materia de quarks en objetos compactos

Los primeros modelos para describir la materia en el interior de las ENs se basaron en considerar a los protones, neutrones y electrones como partículas no interactuantes en un gas de Fermi. En el año 1939, Oppenheimer y Volkoff usaron las ecuaciones de equilibrio hidrostático para calcular numéricamente los modelos de ENs a partir de una EdE simple, que no tenía en cuenta la interacción de los neutrones. De los resultados de sus cálculos concluyeron erróneamente que la masa gravitacional máxima de una estrella de neutrones estática estable era $M \sim 0.7 M_{\odot}$. Este límite se conoce como el límite de masa de Oppenheimer-Volkoff. En 1959, Cameron [46] enfatizó la importancia de tener en cuenta la interacción nuclear al calcular la EdE de las ENs y considerando dichas interacciones, logró extender el límite de masa Oppenheimer-Volkoff de $0.7M_{\odot}$ a $2M_{\odot}$. Además, Cameron fue uno de los primeros autores en sugerir la existencia de hiperones, es decir, estados de tres quark donde al menos uno de ellos es un quark extraño, en el núcleo de las estrellas de neutrones. Luego, a medida que fueron avanzando los modelos nucleares, distintas pruebas se realizaron llevando al modelo de la gota líquida, con sus variantes (como la energía de asimetría) como posible modelo para describir la composición de dichas estrellas. Estos modelos daban predicciones de masas bastante grandes para las estrellas, del orden de $2.8 M_{\odot}$. Sin embargo, luego del trabajo de Ambartsumyan y Saakyan [47], se empezó a considerar con más firmeza la posibilidad de que las ENs contengan también hiperones. El razonamiento para considerar la existencia de estos grados de libertad es que para densidades suficientemente altas, el momento de Fermi de los nucleones (N) sería mayor que la suma de las masas de, por ejemplo, el Kaón (K) y el hiperón Lambda (Λ), generando la reacción:

$$N + N \rightarrow N + \Lambda + K, \quad (2.10)$$

donde luego el Kaón decae de la manera usual (fotones, muones y neutrinos) y se produce el hiperón Λ . Esto genera una disminución en la densidad de energía del sistema, debido a la fuga de los productos de decaimiento de los Kaones, los neutrinos y los fotones. La producción de hiperones en el interior de una EN, ocurre a partir de cierta densidad crítica

en la que se abren nuevos mares de Fermi para estos grados de libertad, generando una conversión de protones y neutrones en hiperones, como se ilustra en la Figura 2.4. Sin embargo, esto hace que la materia sea más compresible y, por lo tanto, dificulta que una ecuación de estado que contenga hiperones pueda explicar las masas de los púlsares de $2 M_{\odot}$. Esto se conoce en la literatura como *hyperon puzzle* [48].

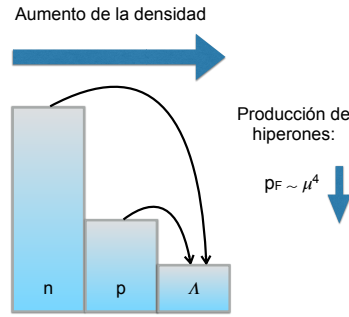


Figura 2.4: Esquema de conversión de nucleones ($N = n, p$) a hiperones (Λ). A medida que aumenta la densidad en el interior de la EN, aparecen nuevos grados de libertad, como los hiperones, además de los nucleones. Al contrario de las condiciones terrestres, donde los hiperones son inestables y se descomponen en nucleones a través de la interacción débil, las condiciones de equilibrio en las ENs pueden hacer que ocurra el proceso inverso, por lo que la formación de hiperones se vuelve energéticamente favorable. Tan pronto como el potencial químico μ_n de los neutrones se vuelve lo suficientemente grande, los neutrones más energéticos (es decir, los de la superficie de Fermi) pueden descomponerse a través de las interacciones débiles en hiperones Λ y formar un nuevo mar de Fermi para esta especie hadrónica con $\mu_{\Lambda} = \mu_n$. De esta forma, la presión de Fermi, p_F , ejercida por los bariones, decrece.

El esquema de la Figura 2.4 muestra que cuanto más densa es la materia nuclear, más energía de Fermi existe para superar el límite de la masa de los hiperones, de modo que su creación reduce la energía y la presión del sistema, siendo un estado preferencial. Cuanto mayor es la presión del sistema, mayor es la probabilidad de que dos nucleones interactúen, lo que aumenta la probabilidad de producir hiperones en nuevos mares de Fermi para disminuir la energía del sistema.

Si bien la presencia de hiperones en las ENs parece ser inevitable desde el punto de vista energético, la EdE correspondiente da como resultado masas máximas, en la construcción de familias de ENs, no compatibles con las observaciones. La solución de este rompecabezas no es fácil, y actualmente es un tema de investigación muy activo, especialmente luego de la detección de los púlsares PSR J1614-2230 y PSR J0348 + 0432, que descartan muchas de las ecuaciones de estado propuestas actualmente con hiperones (tanto microscópicas como fenomenológicas). Para resolver este problema es necesario un mecanismo que eventualmente pueda proporcionar la repulsión adicional necesaria para hacer que la EdE sea más rígida, es decir menor densidad de energía a la misma presión. Esto

lleva a que la materia sea menos compresible y, por lo tanto, incrementa la masa máxima teórica alcanzable. Varios intentos se hicieron para modificar los modelos hadrónicos, de manera que incluyan hiperones, pero en los que se considere también algún canal de interacción repulsivo entre los mismos. Sin embargo, más allá del éxito de los modelos hadrónicos, luego del descubrimiento de que los quarks eran las partículas constituyentes de los hadrones, surgió una nueva pregunta: ¿qué pasaría si a partir de cierta densidad, fuera más favorable energéticamente la conversión de hadrones a quarks libres, en lugar de seguir creando hiperones? Este cuestionamiento, por un lado, dio inicio a una búsqueda que aún continúa hoy, la de modelos que describan al mismo tiempo la materia hadrónica y la materia de quarks. Por otro lado, una pregunta nueva surgió de la hipótesis de Bodmer y Witten[23, 24]: ¿qué pasaría si la materia de quarks extraña fuera más estable que la materia nuclear? Esto significaría que a presión nula, la energía por barión de la materia de quarks debería ser menor que la masa por nucleón del núcleo más estable, que es el ^{56}Fe , como se muestra esquemáticamente en la Figura 2.5

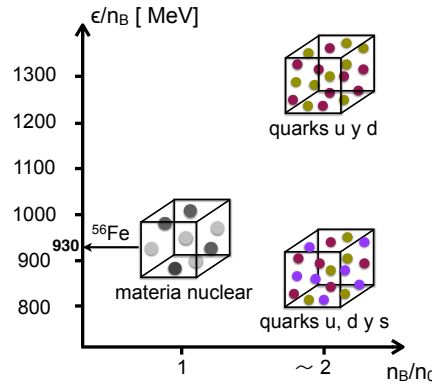


Figura 2.5: Esquema de la comparación de la masa por nucleón del ^{56}Fe y materia de quarks para el caso de dos sabores (quarks u y d) y tres sabores (quarks u, d y s). En teoría, la masa por nucleón de la materia extraña podría estar por debajo de los 930 MeV, lo que la haría más estable que la materia nuclear ordinaria.

Esta hipótesis es válida dado que el modelo que se utilizaba (y se utiliza hoy en muchos análisis) es el conocido modelo de la bolsa del MIT [49, 50, 51]. Este modelo consiste en pensar que dentro de los hadrones los quarks y leptones se comportan como partículas libres, pero que deben superar una presión de bolsa B para salir de la estructura hadrónica, de manera que la presión se escribe como

$$P = \sum_f P^f - B, \quad (2.11)$$

donde P es la presión total, y P^f corresponde a la presión de partículas libres de la especie f . El análisis detallado de este modelo es bastante conocido y está lejos de ser uno de los objetivos de este trabajo, sin embargo, será de utilidad hacer un análisis rápido y breve. Si el potencial químico de las partículas es suficientemente pequeño, la presión será negativa y las partículas se encontrarán confinadas en hadrones. Para un potencial químico suficientemente grande, las partículas se comportarán como fermiones libres, y para un valor particular de los potenciales químicos, ocurrirá que $\sum_f P^f = B$ por lo que la presión será nula y el sistema se encontrará en la interfase entre hadrones y quarks libres. Vale decir que hay distintas variantes de este modelo, las cuales incluyen efectos gluónicos o superconductividad [52], sin embargo, la forma de satisfacer la hipótesis de la materia extraña es equivalente en todas. Partiendo del modelo con dos sabores de quarks u y d , para que la materia nuclear ordinaria sea más estable que los quarks libres, se obtiene que la energía por barión de esta última tiene que ser mayor que la de la primera, llegando a la cota $B^{1/4} > 145,9 \text{ MeV}$. Cuando se pasa al modelo de tres sabores de quarks, como la presión debe ser la misma en la transición a la materia hadrónica, se puede pedir que a presión cero la materia extraña sea más estable que la materia hadrónica, obteniendo otra cota diferente. Esta cota junto con la anterior conduce a la relación $145,9 \text{ MeV} < B^{1/4} < 162,8 \text{ MeV}$ [53] para el modelo más simplificado de bolsa del MIT. Cabe mencionar que esta hipótesis no entra en contradicción con la existencia de núcleos ordinarios, ya que para convertir un átomo de número másico A a materia extraña, se necesita una transición de A quarks u y d a quarks s , lo que implica tiempos de vida medios del orden de 10^6 años. Sin embargo, si existiera la materia extraña como el estado más estable de la materia ordinaria, deberían existir estrellas de quarks, y podrían tener radios arbitrariamente chicos, como se mostró en la Figura 2.1.

Vale destacar algo nuevamente: para que esta hipótesis sea cierta, es necesario que a densidades finitas (potenciales químicos no nulos), exista materia de quarks libres a presión nula. Esto se cumple automáticamente en el modelo de bolsa del MIT, dado que por construcción, cuando la presión de la parte libre del modelo iguala a la constante de bag, se tiene presión nula. Sin embargo, como veremos más adelante, en modelos más sofisticados como el de Nambu Jona-Lasinio, la interfase entre los condensados quirales (el modelo NJL no confina automáticamente, pero forma condensados), y la materia de quarks libres, se da a densidades finitas pero a presiones distintas de cero. Más aún, la materia de quarks libres no llega nunca a presiones nulas, por lo cual la hipótesis de materia extraña no se satisface en estos modelos. Sin embargo, lo que sí es posible, es construir EdE híbridas que mezclen materia hiperónica con materia de quarks extraña, lo cual como dijimos, es uno de los objetivos de este trabajo. En la sección siguiente veremos

cómo construir este tipo de EdE.

2.4. Ecuación de estado híbrida: transición de fase según los formalismos de Maxwell y de Gibbs

Hasta aquí hemos definido los componentes que necesitamos para la construcción de las EdE. Sin embargo, nada dijimos de cómo es que se combinan las EdE hadrónica y de quarks para la construcción de estrellas híbridas. Teniendo en cuenta la posibilidad de desconfinamiento de quarks en el interior de las ENs, una transición de fase de materia hadrónica a materia de quarks podría ocurrir cuando la presión de la fase de quarks sea igual a la de la fase hadrónica. Como adelantamos al comienzo de este capítulo, la naturaleza de la transición de fase depende de la tensión superficial en la interfase hadrón-quark, σ_{HQ} , la cual es aún bastante incierta. Los trabajos recientes sugieren valores $\sigma_{HQ} \sim 30 \text{ MeV/fm}^2$, aunque este valor también podría ser superior a 100 MeV/fm^2 (ver [1] y sus referencias). Para este tipo de construcciones podemos identificar dos tipos de transiciones de fase: abruptas (o a lo Maxwell) o mixtas (o a lo Gibbs). Si $\sigma_{HQ} \gtrsim 70 \text{ MeV/fm}^2$ la transición de fase hadrón-quark será abrupta y a presión constante, con una ecuación de estado discontinua en la densidad de energía. Si $\sigma_{HQ} \lesssim 70 \text{ MeV/fm}^2$, la transición de fase dará como resultado la formación de una fase mixta en la cual hadrones y quarks coexisten, convirtiendo gradualmente la materia hadrónica en materia de quarks desconfiada a medida que la presión del sistema aumenta.

La condición para la transición de una fase hadrónica a una fase más estable se cumple si la energía libre de Gibbs de la fase de quarks es menor que la energía libre de Gibbs de la fase de hadrones, para presiones superiores a la presión de transición. En el caso de transición de fase a lo Maxwell, llamando a las fases hadrónica (H) y de Quarks (Q), las condiciones a cumplirse en la interfase para el caso de tres sabores de quarks son las siguientes:

$$P^H(\mu_B) = P^Q(\mu_Q/3), \quad (2.12)$$

$$T^H(\mu_B) = T^Q(\mu_Q/3), \quad (2.13)$$

$$\epsilon^H(\mu_B) < \epsilon^Q(\mu_Q/3), \quad (2.14)$$

$$E_G^H(\mu_B) = E_G^Q(\mu_Q/3), \quad (2.15)$$

$$\mu_B = \mu_Q/3 = (\mu_u + \mu_d + \mu_s)/3, \quad (2.16)$$

donde $\{P, T, \epsilon, E_G\}$ corresponden a la presión, temperatura, densidad de energía y energía

de Gibbs por partícula. Cabe destacar que este tipo de construcciones (Maxwell y Gibbs) no son excluyentes de transiciones de fase de materia hadrónica a materia de quarks, si no que sirven para construcciones generales de diferentes tipos de transiciones de fase en equilibrio termodinámico. En la literatura usualmente se encuentra la serie de condiciones mencionadas, sin mencionar la energía de Gibbs y se construye únicamente encontrando los puntos de contacto entre las ecuaciones de estado en el plano (P, μ) para temperaturas iguales. Esto es válido cuando la temperatura es cero, donde la energía de Gibbs es igual al potencial químico, o cuando las partículas son las mismas en las dos fases, ya que la definición de la energía de Gibbs está dada por

$$E_G = \frac{G}{n_B} = \frac{\epsilon - TS + P}{n_B} = \frac{\sum_i \mu_i n_i}{n_B}, \quad (2.17)$$

donde G es la energía de Gibbs por unidad de volumen, ϵ es la densidad de energía por unidad de volumen, T es la temperatura, S es la entropía por unidad de volumen, n_B es la densidad bariónica y n_i es la densidad de partículas de la especie i . Cuando el sistema es homogéneo y tenemos la misma clase de partículas en las dos fases, pedir que la energía de Gibbs por partícula sea igual en ambas fases es equivalente a pedir que los potenciales químicos sean iguales. En el caso de tener distintos tipos (y cantidades) de partículas como es el caso de pasar de una fase con hiperones a una fase de quarks, lo que debemos pedir es que las energías de Gibbs por partícula sean iguales. Esto nos lleva a situaciones como se ilustran en la Figura 2.6. Una vez encontrado el punto donde las energías de Gibbs son iguales, se construye la EdE desde $P = 0$ hasta la presión de transición con la curva de menor energía de Gibbs, y se continúa desde la presión de transición con la otra curva, siempre y cuando cumpla la condición de ser la fase favorecida. De esta forma, cuando se grafica la EdE en el plano (ϵ, P) , queda un salto en la densidad de energía como se ve en la Figura 2.6 (derecha).

En el caso de considerar temperatura finita, hay dos opciones: o bien se crean curvas isothermas, o bien se crean curvas isoentrópicas, dependiendo del problema a abordar que se requiera. Para las curvas isothermas la construcción es igual que lo explicado anteriormente, asegurándose que la EdE de las dos fases a juntar estén a la misma temperatura. Para las curvas isoentrópicas, sin embargo, aparece un problema. Si uno por ejemplo calcula las EdE de fases hadrónicas y de quarks para entropía por barión (por ejemplo) $s = 2$, aunque las curvas se crucen, es altamente improbable que en el punto de cruce las temperaturas sean iguales. Es entonces necesario hacer una modificación a la construcción isoentrópica, de la siguiente manera: se empieza por buscar curvas isothermas de cualquier temperatura deseada, y encontrar el punto de cruce. Una vez encontrado el punto de

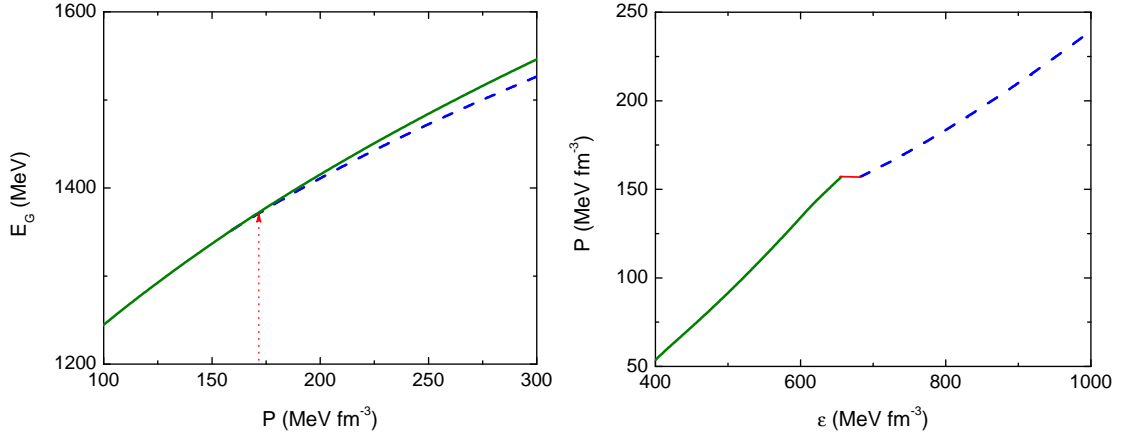


Figura 2.6: Izquierda: construcción de Maxwell para la transición de fase entre quarks y hadrones. La curva con menor energía de Gibbs resulta la fase favorecida, la línea sólida corresponde a una EdE de materia hadrónica y la punteada a una EdE de materia de quarks. Derecha: resultado de la construcción de Maxwell para la presión en función de la densidad de energía para transición de fase de hadrones a quarks, la línea sólida corresponde al salto de energía entre las fases.

transición $(P_T, E_{G,T})$, se calcula la entropía de cada fase. Teniendo la entropía de cada fase, se calculan las ecuaciones de estado isoentrópicas y se vuelve a hacer el cruce, asegurándose así que la transición ocurra a igual temperatura en las dos fases. Esto genera una ecuación de estado que no es estrictamente isoentrópica, pero que mantiene entropía constante en cada fase, y cumple todas las condiciones termodinámicas requeridas para la interfase. Para la construcción a lo Gibbs, el procedimiento es distinto, y más complejo. Lo que se supone aquí es que la materia será puramente hadrónica hasta cierta densidad, luego será una mezcla de quarks libres y hadrones, para finalmente tener únicamente quarks libres. Esta construcción que naturalmente se conoce como fase mixta, se realiza de la siguiente manera. Con las mismas definiciones de presión, temperatura, entropía y densidad bariónica que antes, más un parámetro χ que toma valores entre 0 y 1, escribimos las condiciones al igual que en el trabajo de la referencia [54]:

$$P^H(\mu_B) = P^Q(\mu_Q/3), \quad (2.18)$$

$$\chi n_B^H(\mu_B) + (1 - \chi)n_B^Q(\mu_Q/3) = n_B, \quad (2.19)$$

$$\chi n_c^H(\mu_B) + (1 - \chi)n_c^Q(\mu_Q/3) = 0, \quad (2.20)$$

$$\chi n_L^H(\mu_B) + (1 - \chi)n_L^Q(\mu_Q/3) = n_B Y_L, \quad (2.21)$$

$$\chi S^H(\mu_B) + (1 - \chi)S^Q(\mu_Q/3) = n_B S, \quad (2.22)$$

donde ahora las cantidades termodinámicas quedan definidas como un peso pesado por la variable χ entre las dos fases, y la última ecuación solo se utiliza en el caso de requerir entropía fija en la fase mixta. Vale destacar en este caso la ecuación (2.20), donde n_c es la densidad de carga de cada fase. En el caso de la construcción de Maxwell, la neutralidad de carga era requerimiento local en cada fase, por lo cual esta ecuación no aparecía. En la construcción de fase mixta, se pide que la neutralidad de carga, el número leptónico y la entropía, se conserven globalmente entre las dos fases. Como veremos en los resultados que mostraremos más adelante, esto lleva a distribuciones de partículas muy distintas que en la construcción anterior. En cuanto a la ecuación (2.22), en este caso la temperatura pasa a ser una variable a ajustar numéricamente dentro del sistema de ecuaciones. A diferencia de la construcción de Maxwell, resolver la fase mixta requiere incluir tanto los códigos numéricos de quarks como de hadrones en un código que los contenga, para establecer el sistema de ecuaciones que resuelva las cantidades termodinámicas de manera consistente, a diferencia de solo necesitar cruzar curvas para luego unirlos a partir de dicho cruce. Una vez resuelta la fase mixta, se utiliza la curva hadrónica hasta el punto $\chi = 1$ donde comienza la fase mixta, y luego la curva de quarks desde el punto $\chi = 0$ donde termina, como se ilustra en la Figura 2.7.

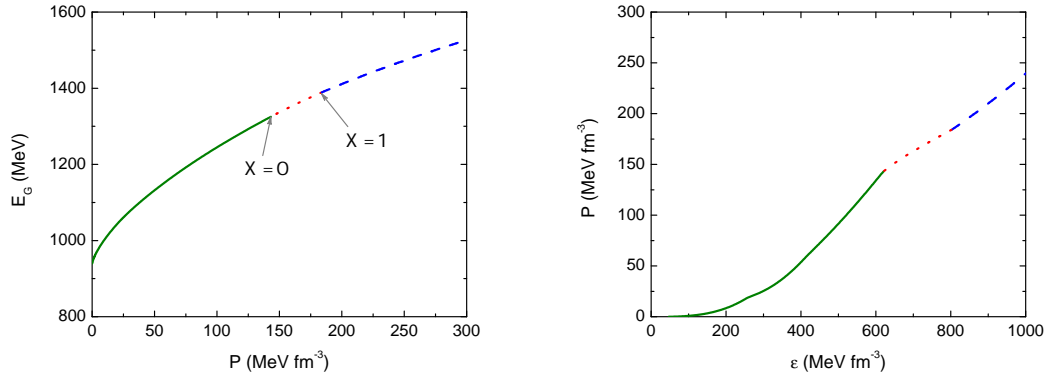


Figura 2.7: Izquierda: construcción de Gibbs para la fase mixta entre quarks y hadrones. Derecha: resultado de la construcción de Gibbs para la presión en función de la densidad de energía para transición de fase de hadrones a quarks. En los dos casos la línea sólida corresponde a una EdE de materia hadrónica, la línea de trazos a materia de quarks, y la línea punteada en el medio a la fase mixta.

La otra diferencia con el caso anterior, es que como ahora para los límites $\chi = 1$ y $\chi = 0$ la construcción de la fase mixta debe coincidir en todas sus variables con las construcciones puras hadrónicas y de quarks en cada caso, es posible realizar el análisis en el plano (P, μ) sin perder generalidad.

Hasta aquí hemos explicado todos los componentes que necesitamos a nivel termodinámico e hidrostático para construir las EdE y estructura que nos permitan modelar estrellas híbridas. Sin embargo, nada dijimos de los modelos particulares a utilizar para describir cada fase (hadrones o quarks). En este trabajo utilizaremos para los dos tipos de construcciones, el modelo Walecka no lineal con constantes de acoplamiento dependientes de la densidad para modelar la fase hadrónica, y la extensión no local y con lazo de Polyakov del modelo Nambu-Jona-Lasinio para modelar la fase de quarks, los cuales desarrollaremos en los siguientes capítulos.

Capítulo 3

Modelo de quarks no local

En este capítulo describiremos en detalle la extensión no local del modelo de Nambu-Jona-Lasinio [16]. Este modelo fue originalmente concebido para describir las interacciones entre nucleones, por lo cual debe rehacerse una interpretación del mismo si se quieren utilizar grados de libertad de quarks en lugar de nucleónicos. Sin embargo, a diferencia del modelo de bolsa del MIT, este modelo respeta varias de las simetrías globales de QCD, y pueden incorporarse interacciones que rompan explícitamente las simetrías que tanto evidencias experimentales como teóricas muestran que deberían estar rotas en ciertos regímenes. En particular, una de sus ventajas radica en tener el mismo mecanismo de ruptura espontánea de simetría quiral que QCD, por lo cual permite ajustar sus parámetros a las masas de los mesones, lo cual lo hace especialmente más robusto que otros modelos. Asimismo, la extensión no local del modelo NJL implica reemplazar las interacciones en el Lagrangiano por términos de interacción no local, modulando la interacción de los campos por un factor de forma adecuado. Entre otras ventajas (ver [55] y sus referencias), las interacciones no locales generan masas dinámicas de los quarks que dependen del momento, como sugieren los cálculos de *Lattice QCD* [56].

3.1. Generalidades de QCD

Para modelar la fase de quarks, necesitamos entender que la QCD es una teoría que no se puede resolver tanto en el régimen de las estrellas de neutrones [57] como en el régimen de bajas temperaturas y densidades. Es necesario, por lo tanto, apelar a modelos efectivos como las del modelo de la bolsa del MIT o el modelo NJL, así como también entender aspectos básicos de esta teoría, para fundamentar la elección de cada modelo efectivo utilizado. Veamos entonces algunos aspectos generales, empecemos por el Lagrangiano de

la QCD, que está dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m})\psi(x) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

donde los campos $\psi(x) = (\psi_{uc}(x), \psi_{dc}(x), \psi_{cc}(x), \psi_{sc}(x), \psi_{tc}(x), \psi_{bc}(x))$ tienen 18 grados de libertad, seis para cada sabor de quarks y tres para cada color $c = \{r, g, b\}$, la matriz de masas desnudas de los quarks \hat{m} tiene únicamente componentes diagonales en sabor. La derivada covariante D^μ se relaciona con los campos gluónicos de la manera

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a \quad (3.2)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.3)$$

con λ_a las matrices de Gell-Man, que son los generadores del grupo de simetrías de color SU(3) que respeta la teoría y f^{abc} la constante de estructura antisimétrica del álgebra de dicho grupo. La cantidad g es la constante de acoplamiento entre quarks y gluones.

Por la estructura no abeliana del grupo de simetrías SU(3) que respeta la teoría, vale mencionar ciertas particularidades que no aparecen en las teorías abelianas (como la QED por ejemplo):

- \mathcal{L}_{QCD} tiene auto-acoplamiento entre gluones (de tres y cuatro gluones por vértice), por lo tanto los gluones tienen carga de color.
- La QCD es asintóticamente libre. El acoplamiento se vuelve débil a cortas distancias (o altos momentos euclídeos Q transferidos). A orden de un lazo, para la constante de acoplamiento fuerte, tenemos que

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f)\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (3.4)$$

donde N_f es el número de sabores y Λ_{QCD} es el parámetro de escala de la teoría que puede ser determinado ajustando a datos experimentales a grandes Q^2 y depende fuertemente de la cantidad de sabores y el esquema de renormalización utilizado. El hecho de que la teoría sea asintóticamente libre permite tratarla perturbativamente a altas escalas de energía ($\alpha_s \rightarrow 0$ cuando $Q \rightarrow \infty$).

- La teoría se vuelve no perturbativa a bajas escalas de energía. La ecuación (3.4) muestra que el acoplamiento se intensifica para Q pequeños. Para momentos transferidos menores a $\Lambda_{QCD} \sim 200$, $\alpha_s > 1$ lo que hace que no sea un parámetro adecuado para la expansión de un desarrollo en serie en el tratamiento de la teoría.

Por este motivo, no puede utilizarse para describir hadrones de masas menores que aproximadamente 1-2 GeV. Esto podría (o no) estar relacionado al confinamiento, es decir, el hecho de que no se observen objetos no neutros de color como grados de libertad en el vacío, ya sean quarks o gluones.

Otra característica que será de gran importancia en este trabajo, es que la QCD tiene una simetría quiral aproximada. Esto quiere decir que es simétrica bajo transformaciones globales de $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ con L y R correspondientes a izquierda y derecha. Esto es lo mismo que decir que es invariante a las transformaciones vectoriales y axiales en el espacio de isoespín

$$SU(N_f)_V : \psi \rightarrow e^{(i\theta_a^V \tau_a)} \psi, \quad (3.5)$$

$$SU(N_f)_A : \psi \rightarrow e^{(i\theta_a^A \gamma_5 \tau_a)} \psi, \quad (3.6)$$

con γ_5 la matriz de Dirac, τ_a los generadores del grupo $SU(N_f)$, y θ los parámetros de las transformaciones. Estas simetrías no son estrictamente exactas, pero sí lo son en el caso de $N_f = 2$ para quarks up y down si se toma la misma masa para los dos quarks, e inclusive se puede utilizar para analizar el caso $N_f = 3$ cuando se incluye al quark strange, que es el caso que trataremos en este trabajo.

El vacío de la QCD también respeta aproximadamente la simetría $SU(N_f)_V$, el espectro de hadrones tiene casi un multiplete degenerado en $SU(N_f)$. Si esto fuera exactamente cierto para la simetría axial, cada hadrón debería tener un compañero quiral degenerado de paridad opuesta. Como esto no sucede, resulta que la simetría quiral está espontáneamente rota en el vacío. Por otro lado, si la simetría quiral se rompe espontáneamente esto da lugar a $(N_f^2 - 1)$ bosones de Goldstone. Si interpretamos, por ejemplo, a los piones como bosones de Goldstone, la mezcla de la ruptura espontánea de simetría más la explícita (correspondiente a las masas no nulas de los quarks u y d), pueden explicar perfectamente la baja masa del pión. Este trabajo fue realizado originalmente por **Nambu** [58], el cual llevo al modelo efectivo de QCD que utilizaremos en todo este trabajo, aunque en una versión modificada incluyendo interacciones no locales.

Por otro lado, a nivel clásico y en el límite de masa nula para los quarks, el Lagrangiano es invariante bajo transformaciones globales

$$UA(1) : \psi \rightarrow e^{(i\alpha \gamma_5)} \psi. \quad (3.7)$$

Esta simetría no es una simetría real de la QCD, ya que se encuentra rota a nivel cuántico. [59], es decir, la corriente $J_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$ tiene divergencia no nula cuando se

considera a $\bar{\psi}$ y ψ como campos. Cuando se tiene esto en cuenta resulta

$$\partial_\mu J_5^\mu(x) = \frac{g^2 N_f}{8\pi^2} E_a B_a, \quad (3.8)$$

donde E_a y B_a son los campos eléctrico y magnético de color. Las ecuaciones de Yang-Mills admiten soluciones clásicas del tipo instantones, para las cuales la integral euclídea $\int d^4x E, B$ es finita. Mediante la ecuación (3.8), estos instantones se acoplan a los quarks. En el trabajo de 't Hooft [60] se demuestra que esta interacción efectiva inducida por los instantones, tiene la forma

$$\det[\psi_i(1 + \gamma_5)\psi_i] + \det[\psi_j(1 - \gamma_5)\psi_j], \quad (3.9)$$

donde los índices i y j recorren los tres sabores de quarks, por lo cual termina siendo una interacción efectiva de seis fermiones.

Finalmente, entre las interacciones posibles entre gluones y quarks, existen canales en el régimen de intercambio de un gluón, que resultan atractivos entre quarks. Como veremos en el capítulo 5, esto necesariamente debería generar fases superconductoras de color, y condensados de diquarks. Estos condensados dependen crucialmente de la cantidad de sabores y colores que se consideren, y desarrollar la teoría general de la cantidad existente de estos objetos para la QCD está fuera del alcance de este trabajo. Por el momento, vale hacer notar únicamente que al existir canales atractivos, este fenómeno debería en principio existir.

Hasta aquí hicimos un resumen de las simetrías y características más importantes de la QCD. Como dijimos en la introducción, nuestro propósito en este trabajo es estudiar la presencia de materia de quarks en el interior de ENs, modelándolas con una EdE que de cuenta de la parte hadrónica y de la parte de quarks que la componen. Como el régimen en el que trabajaremos la QCD resulta no perturbativa, no es resoluble. Necesitamos entonces de un modelo efectivo que de cuenta de los aspectos mencionados, que resumiendo, son:

- Ruptura espontánea de la simetría quiral $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$.
- Ruptura de la simetría axial $UA(1)$.
- Confinamiento
- Superconductividad de color.

A continuación veremos cómo introducir los dos primeros elementos en una de las versiones más simples del modelo no local de Nambu-Jona-Lasinio, y en los capítulos siguientes nos encargaremos del confinamiento y la superconductividad de color.

3.2. Formalismo teórico del modelo NJL no local

Desarrollaremos ahora una de las variantes más sencillas del modelo NJL no local. Luego de entender los aspectos más fundamentales, será bastante directo ir agregando distintos tipos de interacciones. Partimos entonces de la acción euclídea ¹:

$$S_E = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) (i\not{D} + m) \psi(x) - \frac{G}{2} [j_a^s(x) j_a^s(x) + j_a^p(x) j_a^p(x)] \right. \\ \left. - \frac{H}{4} A_{abc} [j_a^s(x) j_b^s(x) j_c^s(x) - 3j_a^s(x) j_b^p(x) j_c^p(x)] \right\}, \quad (3.10)$$

donde las matrices de Dirac corresponden a la representación euclídea, y las corrientes escalares y pseudoescalares están definidas como

$$j_a^s(x) = \int d^4z g(z) \bar{\psi}\left(x + \frac{z}{2}\right) \lambda_a \psi\left(x - \frac{z}{2}\right) \quad (3.11)$$

$$j_a^p(x) = \int d^4z g(z) \bar{\psi}\left(x + \frac{z}{2}\right) i\gamma_5 \lambda_a \psi\left(x - \frac{z}{2}\right), \quad (3.12)$$

siendo λ_a las ocho matrices de Gell Mann más $\lambda_0 = \sqrt{2/3} \mathbb{1}_{3 \times 3}$. La función $g(z)$ corresponde a un regulador no local, para el cual elegimos uno del tipo Gaussiano, siendo

$$g(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-izp} g(p) \quad (3.13)$$

$$g(p) = e^{-\frac{p^2}{\Lambda^2}}. \quad (3.14)$$

Como vemos, tenemos dos tipos de corrientes, escalares $j_a^s(x)$ y pseudoescalares $j_a^p(x)$. El acoplamiento que mezcla los mismos tipos de corrientes (que llamaremos acoplamiento escalar por simpleza) tiene constante de acoplamiento G y el que mezcla distintos tipos corresponde al término de t' Hooft [61], que es el responsable de la ruptura de simetría axial que describimos en la sección anterior. El regulador, además de cumplir la función de generar la no-localidad, tiene una ventaja importante respecto del modelo local: en ese modelo, es necesario introducir un cutoff Λ en las integrales el cual se ajusta para reproducir la masa del pión en los valores de expectación de los condensados $\langle \bar{\phi}\phi \rangle$. El problema con esto es que ese parámetro sirve en el régimen de bajas densidades, donde los

¹Las integrales de este capítulo se realizan sobre todo el espacio euclídeo d-dimensional del diferencial de cada integral, o el espacio completo funcional en el caso de las integrales funcionales.

condensados existen, pero la utilización de un cutoff al trabajar en altas densidades es por lo menos contradictorio, dado que al pasar a densidad finita (como veremos) el potencial químico de cada quark se acopla a la componente cero del momento. En el caso no local, el regulador previene que el corte a medida que el momento aumenta sea abrupto, por lo cual resulta más razonable trabajar con estos modelos a densidades grandes. El problema con el modelo no local es que la explicación de la ruptura espontánea de simetría quiral se hace más extensa y menos evidente a simple vista. Debido a esto, daremos una explicación simplificada en las secciones siguientes, invitando al lector a revisar la referencias [62] para más detalle.

3.3. Bosonización

De la relación entre mecánica estadística y teoría de campos sabemos que la función de partición se puede escribir como $\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E}$. Nuestro objetivo ahora es bosonizar la acción para que nos quede en términos de campos bosónicos que son más sencillos de tratar, para eso introducimos la identidad

$$f(j_a^s, j_a^p) = \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \delta(S_a - j_a^s) \delta(P_a - j_a^p) f(S_a, P_a), \quad (3.15)$$

donde $S_a(x)$ y $P_a(x)$ son los campos auxiliares y escribimos las deltas de la siguiente manera:

$$\delta(S_a - j_a^s) = \int \mathcal{D}\sigma_a \exp\left\{\int d^4x \sigma_a(x) [S_a(x) - j_a^s(x)]\right\} \quad (3.16)$$

$$\delta(P_a - j_a^p) = \int \mathcal{D}\pi_a \exp\left\{\int d^4x \pi_a(x) [P_a(x) - j_a^p(x)]\right\}. \quad (3.17)$$

siendo $\sigma_a(x)$ y $\pi_a(x)$ los campos mesónicos escalar y pseudoescalar, respectivamente. Entonces la funcional de las corrientes es

$$\begin{aligned} f(j_a^s, j_a^p) &= \exp \int d^4x \left\{ \frac{G}{2} [j_a^s(x) j_a^s(x) + j_a^p(x) j_a^p(x)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{H}{4} A_{abc} [j_a^s(x) j_b^s(x) j_c^s(x) - 3j_a^s(x) j_b^p(x) j_c^p(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Al usar las identidades de las deltas y de la función de las corrientes, la idea es escribir la función de partición en términos de los campos nuevos. Los términos que queden dependiendo explícitamente de los campos ψ y las corrientes (que dependen de ψ adentro de las integrales), no podrán sacarse fuera de la integral funcional. El resto puede ser sacado

fuera de la integral de los campos fermiónicos, obteniendo así

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \exp \left\{ \int d^4x \left[\frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} (S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c) \right] \right. \\ & \left. + \sigma_a S_a + \pi_a P_a \right\} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int d^4x \left[\bar{\psi} (i\not{\partial} + m) \psi - \sigma_a j_a^s - \pi_a j_a^p \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Luego de realizar las integrales de los campos fermiónicos (explicadas en el Apéndice A), y escribiendo $\det(A) = \exp \{ \ln [\det(A)] \}$, podemos escribir la función de partición bosonizada como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{\text{Bos}} = & \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \exp \left\{ \ln [\det(A)] \right. \\ & + \int d^4x \left[\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) \right. \\ & \left. \left. + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Con lo cual, sabiendo que la función de partición es la integral funcional del negativo de la exponencial de la acción, obtenemos que la acción bosonizada es

$$\begin{aligned} S_E^{\text{Bos}} = & -\ln [\det(A)] - \int d^4x \left[\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) \right. \\ & \left. + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c) \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde por simplicidad de notación hemos obviado las dependencias, pero vale recordar que el operador A depende de los momentos y los campos auxiliares, y los campos bosónicos tanto como los auxiliares $(\sigma_a, \pi_a, S_a, P_a)$ dependen de las coordenadas x en el espacio euclídeo.

3.4. Aproximación de Campo Medio

Para seguir adelante con el objetivo de hallar el granpotencial termodinámico y las ecuaciones del gap, realizaremos la aproximación de campo medio (ACM). Para esto, primero vale notar que los campos $\sigma_a(x)$ tienen valores medios no nulos para $a = \{0, 3, 8\}$, y los campos $\pi_a(x)$ tienen valores medios nulos, ya que el vacío de la QCD tiene que

ser invariante ante conjugación de carga y paridad. Dicho esto, expandimos los campos alrededor de sus valores medios:

$$\sigma_a(x) = \bar{\sigma}_a + \delta\sigma_a(x) \quad (3.22)$$

$$\pi_a(x) = \delta\pi_a(x). \quad (3.23)$$

Hecho esto, se puede expandir la acción bosonizada de la ecuación (3.21) en distintos órdenes de las fluctuaciones de los campos. El orden cero en fluctuaciones corresponde a la aproximación de campo medio. Esta aproximación asume que los campos bosónicos mantienen un valor igual a su valor medio en todo el espacio. El desarrollo a primer orden en las fluctuaciones se anula, ya que los campos bosonizados minimizan la acción. El siguiente orden correspondiente sería el cuadrático, de manera que

$$S_E^{\text{Bos}} = S_E^{\text{Bos,ACM}} + S_E^{\text{Bos,Cuad}} + \dots \quad (3.24)$$

Cabe destacar que el orden cuadrático es el que se utiliza para ajustar las constantes de acoplamiento del modelo a los observables físicos como las masas de los mesones, las constantes de decaimiento, etc. En este trabajo el desarrollo a ese orden resulta un exceso, ya que para obtener el potencial termodinámico y las cantidades necesarias para los cálculos astrofísicos es suficiente con la aproximación de campo medio. Utilizando esta aproximación, tenemos que el operador $A(p, p')$ de la ecuación (A.9) queda escrito como

$$A(p, p') = [-\not{p} + M(p)] (2\pi)^4 \delta^4(p - p') \text{ con} \quad (3.25)$$

$$M(p) = m + g(p) \lambda_a \bar{\sigma}_a, \quad (3.26)$$

donde reescribimos el argumento del regulador $g(p)$ de manera que quede la delta de cuadrimomentos como factor común. Luego, podemos descomponer el determinante del operador de manera que nos quede

$$\det[A(p, p')] = \det[-\not{p} + M(p)] \det[(2\pi)^4 \delta^4(p - p')]. \quad (3.27)$$

Es fácil ver (transformando Fourier por ejemplo), que el determinante de la delta en espacio de momentos junto con el factor $(2\pi)^4$ es igual a la unidad. Luego, nos queda calcular solo el primer determinante, que al estar dentro de un logaritmo podemos reemplazar

todo por la traza del logaritmo, quedando así

$$\ln [\det(A)] = \text{Tr} \{ \ln [A(p, p')] \} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \ln [-\not{p} + M(p)] \}. \quad (3.28)$$

En este caso la traza se realiza sobre todos los espacios considerados, es decir sabor, color, Dirac y momentos. Cabe destacar que la traza se tiene que seguir realizando sobre la cantidad original de grados de libertad del operador, para no contar de menos. En este caso se tiene que seguir haciendo la integral sobre p' , la cual al no tener argumento nos termina dando como resultado el volumen del espacio, por lo tanto

$$\ln \{ \det [A(p, p')] \} = V^{(4)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \ln [-\not{p} + M(p)] \}. \quad (3.29)$$

Podemos seguir trabajando el término de la traza, utilizando propiedades de las matrices tenemos que

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [\ln (-\not{p} + M)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} [\ln (-\not{p} + M)] + \text{Tr} [\ln (-\not{p} + M)] + \text{Tr} [\ln (-\not{p} + M)^\dagger] - \text{Tr} [\ln (-\not{p} + M)^\dagger] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln (-\not{p} + M) (-\not{p} + M)^\dagger] + \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln (-\not{p} + M)^\dagger (-\not{p} + M)^{-1}]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

El último término de la ecuación (3.30) se anula. Esto se puede ver intercambiando la traza del logaritmo por el logaritmo del determinante y comprobando que da igual a la unidad, por lo tanto el logaritmo se anula. El primer término, luego de realizar el producto de matrices y la traza sobre componentes de Dirac, resulta

$$\ln \{ \det [A(p, p')] \} = 2 \text{Tr} \{ \ln [p^2 + M^2(p)] \}, \quad (3.31)$$

donde la traza a realizar ahora es sobre sabor y color únicamente.

Para el resto de los términos de la acción bosonizada, solamente es necesario realizar el reemplazo $\sigma_a(x)$ por $\bar{\sigma}_a$ y anular $\pi_a(x)$ ya que su valor medio es nulo. Realizando esto y reemplazando en la ecuación (3.21) tenemos que

$$\begin{aligned} S_E^{\text{ACM}} &= -V^{(4)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2 \text{Tr} \{ \ln [p^2 + M^2(p)] \} \\ &\quad - \int d^4 x \left[\bar{\sigma}_a S_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c) \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde ya asumimos que es la acción bosonizada, y reemplazamos el nombre para que se entienda que es en aproximación de campo medio.

3.5. Aproximación de Fase Estacionaria

Hasta aquí hemos hecho todo lo posible para obtener una función de partición resoluble que nos permita calcular las cantidades termodinámicas que vamos a necesitar para el desarrollo de nuestro estudio. Sin embargo, la ecuación (3.32) lleva a una ecuación para la función de partición que no es cuadrática en los campos, y resulta complicada de resolver. Es necesario señalar que si el término de mezcla de 't Hooft no estuviera ($H = 0$), la acción sería cuadrática en los campos y perfectamente resoluble. Como dijimos, este término nos interesa porque es el que rompe la anomalía axial, y además porque como veremos más adelante, influye en la desaparición de los condensados del quark s y eso genera cambios tanto en el diagrama de fases como en la ecuación de estado. Por estas razones es interesante mantener este término, y realizar lo que se conoce como aproximación de fase estacionaria (AFE). En esta aproximación asumimos que la integral se realiza sobre el camino que minimiza la acción. Podemos entonces definir los campos auxiliares \tilde{S}_a y \tilde{P}_a de manera que minimicen el integrando, de tal forma que

$$\left. \frac{\delta}{\delta S_a} S_E^{\text{ACM}} \right|_{S_a=\tilde{S}_a; P_a=\tilde{P}_a} = 0, \quad (3.33)$$

$$\left. \frac{\delta}{\delta P_a} S_E^{\text{ACM}} \right|_{S_a=\tilde{S}_a; P_a=\tilde{P}_a} = 0, \quad (3.34)$$

con lo cual se llega a dos ecuaciones de los campos auxiliares nuevos, dadas por

$$\bar{\sigma}_a + G\tilde{S}_a + \frac{3}{4}HA_{abc}(\tilde{S}_b\tilde{S}_c - \tilde{P}_b\tilde{P}_c) = 0, \quad (3.35)$$

$$G\tilde{P}_a - \frac{3}{2}HA_{abc}(\tilde{S}_b\tilde{P}_c) = 0. \quad (3.36)$$

Ahora bien, reemplazando la ecuación (3.36) en la (3.32), y utilizando las propiedades del tensor $A_{abc} = A_{cab}$, se puede, luego de acomodar adecuadamente las expresiones, llegar a una acción que ya no dependa de los campos \tilde{P}_a , obteniendo

$$\begin{aligned} S_E^{\text{ACM}} &= -V^{(4)} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2 \text{Tr} \{ \ln [p^2 + M^2(p)] \} \\ &\quad - \int d^4x \left(\bar{\sigma}_a \tilde{S}_a + \frac{G}{2} \tilde{S}_a \tilde{S}_a + \frac{H}{4} A_{abc} \tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Pero como dijimos que los campos auxiliares $\tilde{S}_a = \tilde{S}_a(\bar{\sigma}_a)$ y $\bar{\sigma}_a$ no dependen más de la coordenada espacial, podemos escribir la acción por unidad de volumen, de la siguiente

manera

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{\text{ACM}}}{V^{(4)}} = & - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2 \text{Tr} \{ \ln [p^2 + M^2(p)] \} \\ & - \bar{\sigma}_a \tilde{S}_a - \frac{G}{2} \tilde{S}_a \tilde{S}_a - \frac{H}{4} A_{abc} \tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c, \end{aligned} \quad (3.38)$$

lo que nos lleva a una función de partición que integra sobre campos constantes, salvo la integral en los momentos. Ahora, usando que los campos \tilde{S}_a minimizan la acción, se obtienen las denominadas ecuaciones del "gap", para la AFE del modelo NJL-nl. (dependiendo qué valores se le de a a)

$$\bar{\sigma}_a + G \tilde{S}_a + \frac{3}{4} H A_{abc} \tilde{S}_b \tilde{S}_c = 0, \quad (3.39)$$

donde los campos auxiliares quedan definidos minimizando la acción respecto de $\bar{\sigma}_a$

$$-2 \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_a} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \ln [p^2 + M^2(p)] \} = \tilde{S}_a. \quad (3.40)$$

3.6. Diagonalización, ecuaciones del gap y Granpotencial a T=0

Como dijimos anteriormente, solo $\bar{\sigma}_0$, $\bar{\sigma}_3$ y $\bar{\sigma}_8$ son distintos de cero. Entonces definimos una matriz diagonal

$$\text{diag} (\bar{\sigma}_u, \bar{\sigma}_d, \bar{\sigma}_s) = \bar{\sigma}_0 \lambda_0 + \bar{\sigma}_3 \lambda_3 + \bar{\sigma}_8 \lambda_8. \quad (3.41)$$

Notemos, por empezar, que las masas dinámicas definidas en la ecuación (3.26), quedan automáticamente diagonales en sabor por la suma en el índice a . Por eso mismo, de ahora en adelante diremos que $M_f(p) = m_f + \sigma_f g(p)$ con $f = \{u, d, s\}$. Por otro lado, reescribiendo las ecuaciones del gap (3.39) para los índices $a = \{0, 3, 8\}$, multiplicando y sumando cada una por el factor correspondiente para escribir todo en términos de $\bar{\sigma}_u$, $\bar{\sigma}_d$ y $\bar{\sigma}_s$, se puede identificar los campos auxiliares nuevos, los cuales resultan

$$\tilde{S}_u = \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{S}_0 + \tilde{S}_3 + \sqrt{\frac{1}{3}} \tilde{S}_8, \quad (3.42)$$

$$\tilde{S}_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{S}_0 - \tilde{S}_3 + \sqrt{\frac{1}{3}} \tilde{S}_8, \quad (3.43)$$

$$\tilde{S}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{S}_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{S}_8. \quad (3.44)$$

$$(3.45)$$

Invirtiendo estas relaciones, escribiendo todas las componentes no nulas del término de mezcla $A_{abc}\tilde{S}_a\tilde{S}_b\tilde{S}_c$ y reacomodando las expresiones correspondientes, se llega a la acción escrita en términos de los nuevos campos

$$\frac{S_E^{\text{ACM}}}{V^{(4)}} = -2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \ln [p^2 + M^2(p)] \} - \frac{1}{2} \sum_{i=u,d,s} \left(\sigma_i S_i + \frac{G}{2} S_i S_i \right) - \frac{H}{4} S_u S_d S_s, \quad (3.46)$$

donde eliminamos la notación con sombrero y tilde debido a que ya no haremos más aproximaciones y estos serán los campos que utilizaremos de aquí en adelante. Si ahora minimizamos con respecto a σ_i , obtenemos las ecuaciones para los campos auxiliares, que son

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} S_i - 2 \frac{\delta}{\delta \sigma_i} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_c \{ \ln [p^2 + M_i^2(p)] \} &= 0 \implies \\ S_i &= -8 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_c \left[\frac{M_i(p) g(p)}{p^2 + M_i^2(p)} \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde ahora la traza se realiza sobre color únicamente. Finalmente, las ecuaciones del gap para los tres sabores de quarks, se obtienen minimizando S_E^{ACM} respecto de cada campo auxiliar S_i y resultan

$$\sigma_u + G S_u + \frac{H}{2} S_d S_s = 0, \quad (3.48)$$

$$\sigma_d + G S_d + \frac{H}{2} S_u S_s = 0, \quad (3.49)$$

$$\sigma_s + G S_s + \frac{H}{2} S_u S_d = 0. \quad (3.50)$$

Veamos aquí de manera simplificada, cómo estas ecuaciones, además de resolver el granpotencial, nos dan una idea de qué es lo que pasa con las masas de los quarks. Si recordamos que $M_f(p) = m_f + \sigma_f g(p)$, de las ecuaciones anteriores, por ejemplo para el quark u , ecuación (3.48), tenemos que

$$M_u(p) = m_u - \left[G S_u + \frac{H}{2} S_d S_s \right] g(p). \quad (3.51)$$

Supongamos por un momento el caso simple en que $H = 0$. Al ser el campo S_u también dependiente de la masa dinámica M_u , lo que tendremos es una ecuación autoconsistente para esa masa, inclusive en el caso de que $m_u = 0$. Es decir, dependiendo de los valores que tome G , tendremos (o no) una generación de masa dinámica para el quark u , con su correspondiente ruptura de simetría quiral asociada. Esto sucede del mismo modo si

se agrega la interacción con valores no nulos de H . El análisis de los valores de G que cumplen o no estas condiciones, así como el ajuste de estas constantes para reproducir masas y constantes de decaimiento mesónicos, están fuera del alcance de este trabajo. Vale decir sin embargo que para cada sabor de i de quarks, su correspondiente campo σ_i sirve como parámetro de orden de ruptura de la simetría quiral, ya que estos campos son los que influyen en los valores de la masa vestida. Es decir, para valores nulos de los campos σ_i los quarks solo tienen sus masas desnudas m_i , y en el caso contrario, se comportan como quarks con masas vestidas M_i .

Capítulo 4

Modelo PNJL no local

Hasta aquí hemos explicado de cómo incluir en nuestro modelo de quarks, las rupturas de simetrías quirales y axiales. Ahora bien, aunque este modelo produce una transición de una fase con la simetría quiral espontáneamente rota a otra en la que dicha simetría se restaura y viceversa, no da cuenta del mecanismo de confinamiento propiamente dicho. Es decir, la densidad a la que se restaura la simetría quiral podría perfectamente no ser la misma en la que se desconfinan los quarks. Para tener un mecanismo de confinamiento en nuestro modelo, tenemos que incluir lo que se conoce como lazo de Polyakov. Existen cálculos de *Lattice QCD* para el valor de la traza del lazo de Polyakov a temperatura finita, de manera que es posible construir un potencial efectivo asociado a dicho lazo de acuerdo a las estimaciones de *Lattice QCD* [63], por lo tanto veamos antes cómo extender el modelo desarrollado a potenciales químicos y temperatura finitos.

4.1. Extensión a temperatura y potencial químico finitos

Para este procedimiento, utilizaremos el formalismo de tiempo imaginario y las frecuencias de Matsubara. El primero ya lo utilizamos cuando escribimos la acción en espacio euclídeo en la ecuación (3.10), veamos cómo implementar el segundo. Empecemos considerando el caso de fermiones libres, que es el de mayor interés para el procedimiento dado que es donde se ve tanto explícita como fácilmente como incluir las frecuencias de Matsubara, y luego veamos cómo se modifica con las interacciones ya propuestas.

Para un ensamble macro canónico con Hamiltoniano H y carga conservada Q , la función de partición se puede escribir como [64]

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left[e^{-\beta(H - \mu Q)} \right], \quad (4.1)$$

donde $\beta = 1/T$ es la inversa de la temperatura en unidades de la constante de Boltzmann. En el caso de nuestro modelo, la carga conservada corresponde a

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x). \quad (4.2)$$

Al estar el Hamiltoniano multiplicado por β , eso nos da el límite de integración para la variable temporal τ del formalismo de tiempo euclídeo, entonces, pasando al lenguaje de integrales de camino tenemos que la función de partición se escribe como

$$\mathcal{Z} = \int i\mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi}(\tau, \mathbf{x}) \left[-\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \tau} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m + \mu \gamma^0 \right] \psi(\tau, \mathbf{x}) \right\}, \quad (4.3)$$

donde la condición ahora es que los campos sean antiperiódicos en intervalos de β , es decir que $\psi(0, \mathbf{x}) = -\psi(\beta, \mathbf{x})$. Ahora conviene desarrollar este formalismo en el espacio de momentos, por lo que escribimos los campos de la siguiente manera

$$\psi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_n \tau)} \psi_n(\mathbf{p}), \quad (4.4)$$

$$\psi^\dagger(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_n \tau)} \psi_n^\dagger(\mathbf{p}), \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

con $w_n = (2n+1)\pi T$. Reescribiendo el argumento de la exponencial de la ecuación (4.3) en términos de ψ y ψ^\dagger , y utilizando que

$$\int d^3x e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \quad (4.7)$$

$$\int_0^\beta d\tau e^{i\tau(w_n-w_{n'})} = \beta \delta_{w_n, w_{n'}}, \quad (4.8)$$

podemos reescribir la función de partición como

$$\mathcal{Z} = \prod_{n, n', \alpha} \int i\mathcal{D}\psi_{n, \alpha}^\dagger \mathcal{D}\psi_{n, \alpha} \exp \left\{ \frac{1}{\beta^2} \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi^6)} i\psi_{\alpha, n}^\dagger(\mathbf{p}) D_{\alpha\rho} \psi_{\rho, n'}(\mathbf{p}') \right\}, \quad (4.9)$$

con el operador D definido como

$$D = -i\beta \left(-i\omega_n + \mu - \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m\gamma_0 \right) \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \delta_{w_n, w_{n'}}. \quad (4.10)$$

En la última ecuación, las deltas de Dirac y de Kronecker se dejaron explícitamente para

recordar los espacios donde opera D . Nuevamente, como vimos en las secciones anteriores, la función de partición resulta ser el determinante del operador D . Sin embargo, cabe destacar una diferencia: el factor $(1/\beta^2)$ que aparece adelante de la integral en la ecuación (4.9) no es casual. Si bien viene de la renormalización utilizada para los desarrollos en Fourier de los campos, ese factor no es posible de absorber en el operador D manteniendo su adimensionalidad. Como luego tendremos que calcular el determinante y eso nos llevará a utilizar el logaritmo, es preciso dejar el factor mencionado fuera del operador. Luego, utilizando las propiedades que vimos de determinantes, logaritmos, trazas, y matrices de Dirac, es fácil obtener el resultado deseado. Cabe destacar que al calcular las trazas, en lugar de obtener el cuadvolumen como obtuvimos anteriormente, lo que se obtiene es el factor V/T , donde ahora V es el volumen tridimensional de nuestro sistema. Teniendo esto en cuenta, el resultado de estos cálculos es

$$-\frac{T \ln [\mathcal{Z}(T, \mu)]}{V} = \frac{T S_E(T, \mu)}{V} = -2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left[\frac{(w_n - i\mu)^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}{T^2} \right], \quad (4.11)$$

donde la razón de multiplicar la acción por la temperatura y dividirla por el volumen, es que esto nos llevará luego al granpotencial termodinámico que necesitaremos para calcular la ecuación de estado, como veremos en la siguiente sección. Antes de eso, tengamos en cuenta que hasta ahora hemos extendido a temperatura finita el caso de fermiones libres. Para pasar al caso interactuante de la teoría que describimos anteriormente conviene notar dos cosas sobre la ecuación (3.46). Primero, que la dependencia explícita de la acción con la temperatura luego de hacer las aproximaciones de campo medio y fase estacionaria, vendrá solamente del término dentro de la integral. Esto es porque los campos quedan definidos en función del argumento, y lo que habría que discretizar para las frecuencias de Matsubara es lo que está dentro del logaritmo. Segundo, el argumento del logaritmo de la ecuación (4.11) es exactamente igual al del caso libre, si reemplazamos m por $M(p)$. Como en la definición de esa masa aparece el regulador que depende del momento, lo que hay que hacer es incluir la dependencia con las nuevas frecuencias discretizadas. El resto se mantiene igual que en el caso libre, así que sin perder generalidad podemos escribir que

$$\begin{aligned} \frac{T S_E^{\text{MFA}}(T, \mu)}{V} &= -2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{(\omega_n - i\mu)^2 + \mathbf{p}^2 + M^2(\omega_n, \mathbf{p})}{T^2} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=u,d,s} \left(\sigma_i S_i + \frac{G}{2} S_i S_i \right) - \frac{H}{4} S_u S_d S_s. \end{aligned} \quad (4.12)$$

A partir de aquí, solo haremos un cambio de notación para facilitar la escritura de

las ecuaciones. Definimos el vector euclídeo $\hat{\omega}_n = (\omega_n - i\mu, \mathbf{p})$, y escribimos la acción en términos de esta cantidad

$$\begin{aligned} \frac{T S_E^{\text{MFA}}(T, \mu)}{V} &= -2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{\hat{\omega}_n^2 + M^2(\hat{\omega}_n^2)}{T^2} \right] \right\} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=u,d,s} \left(\sigma_i S_i + \frac{G}{2} S_i S_i \right) - \frac{H}{4} S_u S_d S_s. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2. Regularización

Hasta aquí regularizamos el modelo de NJL-nl con las interacciones más simples, a temperatura y potencial químico finitos. Como dijimos en la sección anterior, la cantidad de interés para nosotros es el granpotencial termodinámico. Esta cantidad es de la cual no solo derivaremos las cantidades relevantes como susceptibilidades, condensados, entropía, si no que el comportamiento mismo del granpotencial es el que nos dará los puntos de las transiciones de fase que estudiemos. Ocurre que en ciertos puntos del plano (T, μ) el granpotencial tiene más de una solución que lo minimice, y resulta luego la solución de menor energía de Gibbs la más favorecida. Por lo tanto, como ya venimos haciendo implícitamente, escribimos su forma

$$\Omega^{ACM}(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}^{ACM}(T, \mu) = \frac{T}{V} S_E^{ACM}(T, \mu) = -p(T, \mu), \quad (4.14)$$

donde $p(T, \mu)$ es la presión. Por completitud lo reescribimos con su nombre, de manera que

$$\begin{aligned} \Omega^{ACM}(T, \mu) &= -2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{\hat{\omega}_n^2 + M^2(\hat{\omega}_n^2)}{T^2} \right] \right\} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=u,d,s} \left(\sigma_i S_i + \frac{G}{2} S_i S_i \right) - \frac{H}{4} S_u S_d S_s. \end{aligned} \quad (4.15)$$

El granpotencial escrito así tiene un problema, la integral es claramente divergente. Para solucionar este problema es conveniente identificar de dónde vienen las divergencias, como es usual en procesos de regularización en teorías cuánticas de campos. Notemos que la integral de la extensión a temperatura finita de la ecuación (4.11) correspondiente a la parte libre también es divergente. Entonces, para solucionar este problema proponemos que las divergencias de la ecuación (4.15) vienen únicamente de la parte libre y decimos que el granpotencial regularizado será

$$\Omega_{Reg}^{ACM}(T, \mu) = \Omega^{ACM}(T, \mu) - \Omega^{Libre}(T, \mu) + \Omega^{Libre, Reg}(T, \mu) - \Omega_0, \quad (4.16)$$

donde $\Omega^{Libre}(T, \mu)$ es el granpotencial de la teoría sin interacciones, que como dijimos, es divergente. La cantidad $\Omega^{Libre, Reg}(T, \mu)$ es la parte no divergente del anterior, y Ω_0 es una constante que se fija para que a temperatura y potencial químico nulos resulte $\Omega_{Reg}^{ACM}(T=0, \mu=0) = 0$. Partamos entonces de $\Omega^{Libre}(T, \mu)$ para regularizarlo, el cual se escribía como

$$\Omega^{Libre}(T, \mu) = -2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2}{T^2} \right] \right\}, \quad (4.17)$$

donde definimos $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Para regularizarlo, notemos que vale la siguiente identidad

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2}{T^2} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \ln \left[\frac{\omega_n^2 + (E_p + \mu)^2}{T^2} \right] + \ln \left[\frac{\omega_n^2 + (E_p - \mu)^2}{T^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

y escribimos cada término de la manera

$$\frac{\omega_n^2 + (E_q \pm \mu)^2}{T^2} = (2n+1)^2 \pi^2 + \left(\frac{E_q \pm \mu}{T} \right)^2. \quad (4.19)$$

Luego, teniendo en cuenta que la expresión (4.19) está como argumento de un logaritmo en (4.18), podemos escribirla como una integral de la forma

$$\begin{aligned} & \ln \left[(2n+1)^2 \pi^2 + \left(\frac{E_q \pm \mu}{T} \right)^2 \right] \\ &= \int_1^{\left(\frac{E_q \pm \mu}{T} \right)^2} \frac{d(\theta)^2}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2} + \ln [1 + (2n+1)^2 \pi^2], \end{aligned} \quad (4.20)$$

y utilizando una última identidad para la suma, la cual es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + e^\theta} \right), \quad (4.21)$$

podemos usar (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21) para escribir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2}{T^2} \right] = \frac{E_q}{T} + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q + \mu}{T}} \right] + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q - \mu}{T}} \right] + \text{ctes}, \quad (4.22)$$

donde “ctes” se refiere a términos que no dependen de T ni de μ . Es claro que el primer término de (4.22) es divergente, dado que E_q es lineal en los momentos para momentos grandes, y ese término va dentro de una integral en cuatrimomentos. Como dijimos que queremos quedarnos únicamente con la parte no divergente, podemos eliminar este término junto con los constantes, que no aportan a la sustracción. Desechando estos términos y metiendo todo en la ecuación (4.17), podemos definir el granpotencial libre regularizado:

$$\Omega_{Libre, Reg}(T, \mu) = -2T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q + \mu}{T}} \right] + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q - \mu}{T}} \right] \right\}, \quad (4.23)$$

y con eso, más la definición (4.16), tenemos finalmente el granpotencial regularizado a campo medio

$$\begin{aligned} \Omega_{Reg}^{ACM}(T, \mu) &= -2T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{\hat{\omega}_n^2 + M^2(\hat{\omega}_n^2)}{\hat{\omega}_n^2 + m^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q + \mu}{T}} \right] + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q - \mu}{T}} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=u,d,s} \left(\sigma_i S_i + \frac{G}{2} S_i S_i \right) - \frac{H}{4} S_u S_d S_s. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ahora bien, con esto tenemos el granpotencial a campo medio regularizado, lo que queda ver es cómo se extienden a temperatura y potencial químico finitos los campos auxiliares. Para estos campos, que se obtienen minimizando el granpotencial respecto de σ_i , es válido utilizar la siguiente sustitución, para un integrando que sea una función $f(p_0, \mathbf{p})$ genérica, vale que:

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(w_n - i\mu, \mathbf{p}). \quad (4.25)$$

Notar que ya sea usando (4.25) o calculando los S_i como hicimos anteriormente, minimizando el granpotencial respecto de σ_i , se obtiene lo mismo

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}S_i &= 2T \frac{\delta}{\delta\sigma_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \left\{ \ln \left[\frac{\hat{\omega}_n^2 + M^2(\hat{\omega}_n^2)}{\hat{\omega}_n^2 + m^2} \right] \right\} = 0 \implies \\
S_i &= -8T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \left[\frac{M_i(\hat{\omega}_n^2)g(\hat{\omega}_n^2)}{\hat{\omega}_n^2 + M_i^2(\hat{\omega}_n^2)} \right]. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Vale aclarar que la receta (4.25) sirve solo para cantidades y campos auxiliares después de que se regularizó el granpotencial. Si hubiéramos usado ese método para pasar a temperatura y potencial químico finitos en la acción sin interacciones (por ejemplo), nos hubiera faltado el término T^2 dividiendo en el logaritmo de (4.11), y el procedimiento de regularización hubiera sido erróneo. Es decir, no se puede evitar desarrollar el método de Matsubara en detalle para la regularización de la integral, pero luego los campos auxiliares se pueden extender a T y μ finitos fácilmente con la receta mencionada. Esta forma de extensión la volveremos a utilizar en siguientes secciones, cuando agreguemos interacciones (y campos auxiliares) al modelo que venimos estudiando.

Por último, es útil tener la expresión del granpotencial a temperatura cero y μ finito, ya que nos va a permitir determinar las propiedades termodinámicas en dicho régimen. En el primer término logarítmico de la integral de la ecuación (4.23), al seguir con la sumatoria sobre n explícitamente, se puede volver a cambiar \hat{w}_n^2 por p^2 (el cuadrimomento), y pasar la integral a una en d^4p . El segundo término de las exponenciales se calcula tomando el límite a $T \rightarrow 0$ dentro del integrando, y luego realizando la integral en d^3p , obteniendo

$$\begin{aligned}
\Omega_{Reg}^{ACM}(0, \mu) &= -2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{p^2 + M^2(p^2)}{p^2 + m^2} \right] \right\} \\
&- \text{Tr} \left\{ \frac{\Theta(\mu - m)}{24\pi^2} \left\{ [(2\mu^2 - 5m^2)\mu\sqrt{\mu - m}] + \left[3\mu^4 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu - m}}{m} \right) \right] \right\} \right\} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=u,d,s} \left(\sigma_i S_i + \frac{G}{2} S_i S_i \right) - \frac{H}{4} S_u S_d S_s. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Hasta aquí, hemos desarrollado una de las variantes con interacciones más simples del modelo NJL-nl a temperatura y potencial químico finitos. Veamos como, ahora que hemos incorporado el ingrediente de la temperatura, podemos extender el modelo a casos más realistas.

4.3. Extensión al modelo PNJL-nl

Hasta aquí hemos desarrollado el modelo NJL no local a temperaturas y potenciales químicos finitos. Como dijimos anteriormente, uno de nuestros objetivos es incluir en el modelo un mecanismo de confinamiento, conocido como el lazo de Polyakov. Veamos entonces una breve introducción a su formalismo, para luego incluirlo en el modelo.

4.3.1. El lazo de Polyakov

El lazo de Polyakov fue propuesto por A.M. Polyakov[65] como una aplicación del lazo de Wilson[66] al problema de propiedades térmicas de campos de calibre, en particular como un mecanismo que explicara el desconfinamiento de quarks a una cierta temperatura, conocida como temperatura de desconfinamiento. Para explicarlo mejor primero deberemos comentar brevemente las simetrías que son tenidas en cuenta.

Siguiendo el trabajo de 't Hooft [61], en una teoría de calibre local en $SU(N)$ aparece una simetría global $Z(N)$. Para ver esto, partimos de una densidad lagrangiana, que incluya la interacción de los quarks con los campos gluónicos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi, \quad (4.28)$$

donde

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu, \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{-ig} [D_\mu, D_\nu]; \quad (4.29)$$

$A_\mu = A_\mu^a t^a$, con los generadores de $SU(N)$ normalizados como $\text{Tr}(t^a, t^b) = \delta^{ab}/2$. Este Lagrangiano es invariante ante transformaciones de calibre $SU(N)$, Ω , dadas por

$$D_\mu \rightarrow \Omega^\dagger D_\mu \Omega, \quad \psi \rightarrow \Omega^\dagger \psi. \quad (4.30)$$

Al ser un elemento de $SU(N)$, Ω satisface que

$$\Omega^\dagger \Omega = \mathbb{1}, \quad \det \Omega = 1. \quad (4.31)$$

Dado que Ω es una transformación de calibre local, es en general una función del espacio-tiempo. Consideremos una transformación de calibre dada por una fase constante por la matriz unidad:

$$\Omega_c = e^{-i\varphi} \mathbb{1}. \quad (4.32)$$

Para que esta transformación sea un elemento de $SU(N)$, el determinante debe ser igual

a uno, lo cual requiere que

$$\varphi = \frac{2\pi j}{N} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (4.33)$$

dado que un número entero no puede cambiar en forma continua de un punto a otro, esto define una simetría global $Z(N)$.

Al ser un subgrupo de las transformaciones de calibre, las rotaciones del grupo $Z(N)$ son siempre una simetría del Lagrangiano. Sin embargo, veremos luego que en presencia de quarks dinámicos, las rotaciones de $Z(N)$ no son una simetría de la teoría ya que estas violan las condiciones de borde requeridas.

Trabajando en espacio-tiempo euclídeo a una temperatura T , la coordenada de tiempo imaginario τ es de extensión finita, $\tau: 0 \rightarrow \beta = 1/T$. Las condiciones de borde que deben satisfacer los campos están dadas por la estadística propia de cada uno de ellos. Esto es, los gluones (bosones) deben ser periódicos en τ , mientras que los quarks (fermiones) deben ser anti-periódicos:

$$A_\mu(\vec{x}, \beta) = +A_\mu(\vec{x}, 0) \quad , \quad \psi(\vec{x}, \beta) = -\psi(\vec{x}, 0). \quad (4.34)$$

Obviamente, cualquier transformación de calibre que sea periódica en τ respeta estas condiciones de borde. Sin embargo, 't Hooft encontró que se puede considerar transformaciones de calibre más generales, las cuales son periódicas a menos de Ω_c :

$$\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c \quad , \quad \Omega(\vec{x}, 0) = 1. \quad (4.35)$$

Los campos de color adjuntos son invariantes ante esta transformación, mientras que los que están en la representación fundamental no lo son, en consecuencia, las teorías de calibre $SU(N)$ puras tiene una simetría global $Z(N)$, la cual es destruida al incluir quarks dinámicos.

En la teoría de gluones pura, un parámetro de orden para la simetría $Z(N)$ se construye utilizando la línea de Wilson térmica:

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left(ig \int_0^\beta A_0(\vec{x}, \tau) d\tau \right), \quad (4.36)$$

donde g es la constante de acoplamiento de calibre, y A_0 es el vector potencial en la dirección temporal. El símbolo \mathcal{P} denota ordenamiento de camino, de manera que la línea de Wilson térmica transforma como un campo adjunto ante transformaciones de calibre $SU(N)$ locales:

$$L(\vec{x}) \rightarrow \Omega^\dagger(\vec{x}, \beta) L(\vec{x}) \Omega(\vec{x}, 0). \quad (4.37)$$

El lazo de Polyakov [65] se define como la traza de la línea de Wilson térmica, y es por lo tanto, invariante de calibre:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{N} \text{Tr} L = N^{-1} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left(ig \int_0^\beta A_0(\vec{x}, \tau) d\tau \right) \quad (4.38)$$

Ante transformaciones globales $Z(N)$, el lazo de Polyakov Φ trasforma como un campo con carga uno:

$$\Phi \rightarrow e^{i\varphi} \Phi. \quad (4.39)$$

A muy alta temperatura, la teoría es casi ideal ($g \approx 0$), por lo que se esperaría que $\langle \Phi \rangle \sim 1$. Sin embargo, el vacío permitido exhibe una degeneración de N hojas. Esto es,

$$\langle \Phi \rangle = \exp \left(\frac{i2\pi j}{N} \right) \Phi_0 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (4.40)$$

donde Φ_0 es una función real, que además cumple que $\Phi_0 \rightarrow 1$ cuando $T \rightarrow \infty$. Cualquier valor de j es equivalente, por lo que la elección usual resulta en la ruptura espontánea de la simetría global $Z(N)$.

A temperatura cero, el confinamiento implica que Φ_0 se cancela [61]. Por lo tanto, debe existir cierto valor de temperatura T_c , a partir del cual Φ_0 deja de ser nulo y se produce el desconfinamiento. Esto es

$$\begin{cases} \Phi_0 = 0 & \text{si } T < T_c, \\ \Phi_0 > 0 & \text{si } T > T_c. \end{cases} \quad (4.41)$$

Como es habitual, si Φ_0 se vuelve distinto de cero en forma continua alrededor de T_c , la transición es de segundo orden; mientras que si salta de golpe en T_c , es de primer orden. Lo que resulta atípico es que la simetría $Z(N)$ esté espontáneamente rota a altas temperaturas en lugar de estarlo a bajos valores de T . No entraremos en la discusión de este asunto aquí, pero si se desea ver una explicación heurística, se puede consultar la referencia [67].

Por otro lado, en presencia de quarks dinámicos la simetría $Z(N)$ está explícitamente rota. En este caso entonces, el lazo de Polyakov deja de ser un parámetro de orden riguroso, pero sirve aún como indicador de un *crossover* rápido hacia el desconfinamiento. En la sección siguiente veremos cómo agregar el campo Φ al modelo de quarks efectivo con el que trabajaremos.

4.3.2. Inclusión del campo Φ en el modelo NJL-nl

Para incluir el campo Φ en nuestro modelo, empezamos reemplazando la derivada normal por la derivada covariante en la ecuación (3.10), de manera que

$$\bar{\psi}(x)(i\cancel{D} + m)\psi \rightarrow \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu + m)\psi, \quad (4.42)$$

y agregando al Lagrangiano el potencial de Polyakov $\mathcal{U}(\Phi)$, con $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, y A_μ los campos de calibre de color.

Respecto a los campos gluónicos, asumimos que los mismos proveen un campo de color constante $A_4 = iA_0 = ig\delta_{\mu 0}G_a^\mu\lambda^a/2$, donde G_a^μ es el tensor de los campos de calibre de color. Entonces, la traza del lazo de Polyakov está dada por $\Phi = \frac{1}{3}\text{Tr exp}(i\phi/T)$, donde $\phi = iA_0$ y A_0 es el mismo campo de gluones desarrollado en la sección 4.3.1. Trabajaremos en el calibre de Polyakov, en el cual la matriz ϕ está dada por una representación diagonal $\phi = \phi_3\lambda_3 + \phi_8\lambda_8$. Esto deja solamente dos variables independientes, ϕ_3 y ϕ_8 . A potencial químico nulo, debido a las propiedades de conjugación de carga del Lagrangiano de la QCD, se espera que el campo medio de la traza del lazo de Polyakov sea una cantidad real. Dado que ϕ_3 y ϕ_8 tienen que ser reales[68], esto implica que $\phi_8 = 0$. En general, esto no necesita ser cierto a μ finito [69, 70, 71]. Al igual que en las referencias [72, 68, 70, 71, 73, 74], asumiremos que el potencial \mathcal{U} es tal que la condición $\phi_8 = 0$ sea satisfecha, al menos para el rango de valores de μ y T de interés. El campo medio del lazo de Polyakov trazado está, por lo tanto, dado por $\bar{\Phi} = \bar{\Phi} = [1 + 2\cos(\phi_3/T)]/3$. La forma de acoplamiento con los quarks es evidente dado que $A_4 = iA_0 = \phi$ se acopla a la componente cero de la derivada, generando un corrimiento del potencial químico de manera que si antes teníamos que $\hat{\omega}_n = (\omega_n - i\mu, \mathbf{p})$, ahora tenemos que realizar el reemplazo

$$\hat{\omega}_n = (\omega_n - i\mu, \mathbf{p}) \rightarrow \omega_{nc} = (\omega_n - i\mu + \phi_c, \mathbf{p}), \quad (4.43)$$

con $\phi_c = c\phi_3$, y $c = 1, -1, 0$. para r, g, b respectivamente. El potencial de Polyakov que utilizaremos está dado por[72]

$$\mathcal{U}(\Phi, T) = \left\{ -\frac{1}{2}a(T)\Phi^2 + b(T)\ln[1 - 6(\Phi^2 + 8\Phi^3 - 3\Phi^4)] \right\} T^4, \quad (4.44)$$

con los coeficientes

$$a(T) = a_0 + a_1\left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad ; \quad b(T) = b_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3. \quad (4.45)$$

Los valores de T_0 , a_i y b_3 se fijan a resultados de la QCD en la red, siendo entonces

$a_0 = 3,51$, $a_1 = -2,47$, $a_2 = 15,2$, $b_3 = -1,75$ y $T_0 = 195$ MeV, del mismo modo que en la referencia [75]. Con estos ingredientes, podemos escribir el granpotencial con el lazo de Polyakov incluido, siendo este

$$\begin{aligned} \Omega_{Reg}^{ACM}(T, \mu) = & -2T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{f,c} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{\omega_{nfc}^2 + M_f^2(\omega_{nfc}^2)}{\omega_{nfc}^2 + m_f^2} \right] \right. \\ & + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q + \mu_f + i\phi_c}{T}} \right] + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q - \mu_f - i\phi_c}{T}} \right] \Big\} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=u,d,s} \left(\sigma_i S_i + \frac{G}{2} S_i S_i \right) - \frac{H}{4} S_u S_d S_s + \mathcal{U}(\Phi). \end{aligned} \quad (4.46)$$

En la última ecuación, la suma sobre color se hace sobre $c = 1, -1, 0$ y el subíndice f agregado tanto a las frecuencias como a los potenciales químicos está puesto con motivo de escribir el caso más genérico donde los potenciales químicos de cada sabor sean distintos, de manera que $\omega_{nfc} = (\omega_n - i\mu_f + \phi_c, \mathbf{p})$. Vale la pena remarcar que el campo ϕ_c está incluido también en las exponenciales del segundo término de la integral. Si bien ese término venía de regularizar el granpotencial sin interacciones, asumimos que los campos de color siguen presentes a nivel fundamental en la teoría. Es decir, la derivada D_μ sigue presente en la teoría “libre”, por lo cual el campo de color debe incluirse en el término de regularización.

Finalmente, para que el sistema sea resoluble, hay que pedir que Φ minimice el granpotencial, llevando a un sistema de ecuaciones un grado más alto que el que teníamos anteriormente, siendo este

$$\sigma_u + G S_u + \frac{H}{2} S_d S_s = 0, \quad (4.47)$$

$$\sigma_d + G S_d + \frac{H}{2} S_s S_u = 0, \quad (4.48)$$

$$\sigma_s + G S_s + \frac{H}{2} S_u S_d = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \phi_3} = 0, \quad (4.50)$$

donde las nuevas contribuciones del lazo de Polyakov están dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = & \sum_{f,c} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ 4cT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_{0nfc} \left[\frac{1}{\omega_{nfc}^2 + M_{fnc}^2} - \frac{1}{\omega_{nfc}^2 + m_f^2} - \frac{2M_{fnc}\sigma_f g(\omega_{nfc}^2)}{(\omega_{nfc}^2 + M_{fnc}^2)\Lambda^2} \right] \right. \\
& \left. + \frac{ic}{1 + e^{\frac{E - \mu_f - ic\phi_3}{T}}} - \frac{ic}{1 + e^{\frac{E + \mu_f + ic\phi_3}{T}}} \right\} \sqrt{\frac{3T^2}{1 + (2 - 3\Phi)\Phi}} + \frac{\partial \mathcal{U}(\Phi, T)}{\partial \Phi}, \quad (4.51)
\end{aligned}$$

donde $\omega_{0nfc} = \omega_n - i\mu_f + c\phi_3$, abreviamos M_f en lugar de $M_{fnc}(\omega_{nfc}^2)$ y los términos provenientes del potencial

$$\frac{\partial \mathcal{U}(\Phi, T)}{\partial \Phi} = T^4 \Phi \left[-a - \frac{12b}{1 + 2\Phi - 3\Phi^2} \right], \quad \text{con} \quad (4.52)$$

$$\phi_3 = T \arccos\left(\frac{3\Phi - 1}{2}\right). \quad (4.53)$$

4.4. Inclusión de interacciones vectoriales

Hasta aquí hemos desarrollado el modelo NJL no local teniendo en cuenta solo interacciones escalares y pseudoescalares entre quarks. Es necesario, sin embargo, notar que faltan dos ingredientes: superconductividad de color, e interacciones vectoriales. Como veremos más adelante, las interacciones vectoriales tienen un rol importante en la competencia entre la aparición de condensados de diquarks y la restauración de la simetría quiral. Si bien al aumentar esta interacción, tanto la aparición de diquarks como la restauración de la simetría quiral aparecen a densidades mayores, no lo hacen de la misma manera. Es entonces posible encontrar valores de acoplamientos vectoriales que lleven a que estos dos fenómenos sucedan a la misma densidad, lo cual podría llevar a diagramas de fase inesperados, como una estructura de dos puntos críticos en el plano (T, μ) [76, 77, 78]. Por otro lado, vale notar que desde un punto de vista de análisis del grupo de renormalización [79, 80], el modelo quiral instantón anti-instantón [81], y el modelo truncado de Dyson-Schwinger de la QCD [82], todos apoyan la idea de la existencia de interacciones vectoriales de quarks de cuatro puntos. Estas interacciones también podrían ser responsables de las propiedades de vacío de mesones vectoriales en las teorías efectivas de baja energía de la QCD [83, 84]. Veamos entonces cómo incluirlas a nuestro modelo. La idea es agregar al Lagrangiano original, una interacción del tipo

$$\mathcal{L}_V = \frac{G_V}{2} j_a^\mu(x) j_a^\mu(x); \text{ con} \quad (4.54)$$

$$j_a^\mu(x) = \int d^4z g(z) \bar{\psi}\left(x + \frac{z}{2}\right) \lambda_a \gamma^\mu \psi\left(x - \frac{z}{2}\right), \quad (4.55)$$

donde nuevamente las λ_a son las matrices de Gell-Man (expandidas con la proporcional a la identidad para $a = 0$) que pueden adoptar los valores $a = \{0, 3, 8\}$ al igual que para las interacciones escalares. En la aproximación de campo medio, la única corriente que da lugar a un valor de expectación no nulo es la $j_a^0(x)$, por lo cual tendremos que introducir tres nuevos campos que llamaremos θ_a y sus respectivos campos auxiliares V_a , al igual que en la sección 3.3. Es fácil ver, que al tener esta componente la matriz γ^0 en el medio, lo que sucederá es que generará un corrimiento en la componente cero del momento, que resulta en $p_0 \rightarrow p_0 + i\theta_a \lambda_a g(p)$. De forma análoga que en el capítulo 3, recordemos que las corrientes escalares que no estaban multiplicadas por matrices, generaban el corrimiento en la masa de manera que $m \rightarrow m + \sigma_a \lambda_a g(p)$ en la ecuación (3.26). Del mismo modo que hicimos antes, la aproximación de campo medio junto con la de fase estacionaria, y la diagonalización, son directas y resultan inclusive más simples que el desarrollo realizado en la sección 3.3. Debido a esto, podemos escribir directamente el granpotencial incluyendo la interacción vectorial, que resulta:

$$\begin{aligned} \Omega_{Reg}^{ACM}(T, \mu) = & -2T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{f,c} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{q_{nfc}^2 + M_{fnc}^2}{\omega_{nfc}^2 + m_f^2} \right] \right. \\ & + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q + \mu_f + i\phi_c}{T}} \right] + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_q - \mu_f - i\phi_c}{T}} \right] \Big\} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=u,d,s} \left(\sigma_i S_i + \frac{G_S}{2} S_i S_i + \theta_f V_f - \frac{G_V}{2} V_f^2 \right) \\ & - \frac{H}{4} S_u S_d S_s + \mathcal{U}(\Phi), \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde $q_{nfc} = (\omega_{nfc} + i\theta_f g(\omega_{nfc}), \mathbf{p})$, y hemos hecho el cambio $G \rightarrow G_S$, para que la interacción escalar quede explícitamente diferenciada de la interacción vectorial. Cabe destacar que las nuevas frecuencias q_{nfc} no aparecen como argumento de los reguladores $g(\omega_{nfc})$, ya que los reguladores son introducidos a nivel Lagrangiano antes de realizar las aproximaciones de campo medio, así que conservan sus argumentos originales. Del mismo modo, el potencial químico de las exponenciales del segundo término de la integral, tampoco se corrige, debido a que vienen de la regularización de la parte libre, en la cual la

interacción vectorial no tiene ningún rol. Los campos auxiliares V_f se obtienen minimizando el granpotencial respecto de θ_f , de modo que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V_f &= 2T \frac{\delta}{\delta \sigma_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \left\{ \ln \left[\frac{q_{nfc}^2 + M_{fnc}^2}{\omega_{nfc}^2 + m_f^2} \right] \right\} = 0 \implies \\ V_f &= -8T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \left[\frac{iq_{0fnc}g(\omega_{nfc}^2)}{\omega_{nfc}^2 + M_{fnc}^2} \right], \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde $q_{0nfc} = \omega_{nfc} + i\theta_f g(\omega_{nfc})$ es la componente cero de q_{nfc} . Finalmente, a las ecuaciones del gap se agregan nuevas ecuaciones, que surgen de minimizar el granpotencial respecto de los campos V_f , teniendo entonces el sistema:

$$\sigma_u + G_S S_u + \frac{H}{2} S_d S_s = 0, \quad (4.58)$$

$$\sigma_d + G_S S_d + \frac{H}{2} S_s S_u = 0, \quad (4.59)$$

$$\sigma_s + G_S S_s + \frac{H}{2} S_u S_d = 0, \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = 0, \quad (4.61)$$

$$\theta_u - G_V V_u = 0, \quad (4.62)$$

$$\theta_d - G_V V_d = 0, \quad (4.63)$$

$$\theta_s - G_V V_s = 0, \quad (4.64)$$

donde hemos hecho el remplazo $G \rightarrow G_S$ para explicitar que se trata de la constante de acoplamiento escalar, y la derivada respecto de Φ ligeramente modificada del caso anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} &= \sum_{f,c} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ 4cT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{q_{0nfc}}{q_{nfc}^2 + M_{nfc}^2} - \frac{\omega_{0nfc}}{\omega_{nfc}^2 + m_f^2} - \frac{2\omega_{0nfc}g(\omega_{nfc}^2)(M_f\sigma_f + iq_{0nfc})}{(q_{nfc}^2 + M_{nfc}^2)\Lambda^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{ic}{1 + e^{\frac{E-\mu_f-ic\phi_3}{T}}} - \frac{ic}{1 + e^{\frac{E+\mu_f+ic\phi_3}{T}}} \right\} \sqrt{\frac{3T^2}{1 + (2-3\Phi)\Phi}} + \frac{\partial \mathcal{U}(\Phi, T)}{\partial \Phi}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

finalmente, el parámetro G_V queda definido en términos del parámetro G_S , de manera que $\zeta_V = G_V/G_S$ y $0 < \zeta_V < 0,5$, según los límites calculados por la referencia [62].

El sistema de ecuaciones (4.58) es el sistema completo que se necesita resolver para describir la materia de quarks, ahora con interacciones vectoriales, temperatura y potencial químico finitos. Como dijimos en los capítulos anteriores, nuestro objetivo es calcular la

EdE en el régimen de altas densidades para describir la materia de quarks en el interior de las EN. Sin embargo, faltarían dos componentes para que las EdE generadas por el sistema mencionado cumplan los requisitos para materia en el interior de las EN: por un lado superconductividad de color, y por el otro la inclusión de leptones en el modelo, de manera de tener neutralidad de carga eléctrica. Respecto de la superconductividad de color, resulta imposible de incluir al mismo tiempo que el lazo de Polyakov, por lo cual la desarrollaremos aparte en secciones siguientes. Por otro lado, la neutralidad de carga eléctrica es sencilla de agregar, pero antes es necesario remarcar que esta inclusión genera cambios en la ubicación de la línea de primer orden del diagrama de fases, ya que los potenciales químicos de los quarks son afectados por a los potenciales químicos de los electrones, muones y neutrinos debido a la condición de equilibrio químico. Para garantizar que las EdE que computemos para el interior de las EN sean de materia de quarks desconfiada, deberíamos en principio asegurarnos que los potenciales químicos a los que trabajemos caigan en la zona correspondiente del diagrama de fases. Por otro lado, para comprobar que nuestro modelo sea completo, también es útil verificar cómo se comporta a densidad nula y temperaturas finita. Es decir, que a diferencia del modelo de la bolsa del MIT, sirva para describir propiedades de mesones a bajas densidades y temperaturas, y al mismo tiempo que las líneas de transición de fase se encuentren dentro de las regiones sugeridas por los experimentos. Por esto, antes de incluir leptones o desarrollar la teoría con superconductividad de color, veremos en la sección siguiente cómo construir el diagrama de fases, y qué resultados obtenemos con nuestro modelo para distintas parametrizaciones del acoplamiento vectorial que se desarrolló en esta sección.

4.5. Construcción del diagrama de fases

En esta sección explicaremos cómo construir el diagrama de fases del modelo NJL-nl. Como mostraremos algunos resultados a modo de ejemplo, daremos los valores de las parametrizaciones que utilizamos para obtenerlos. Las masas del quark u y d , las constantes de acoplamiento G_S y H , y el parámetro Λ del modelo se ajustaron para reproducir los valores fenomenológicos de la constante de decaimiento del pión $f_\pi = 92,4$ MeV, y las masas de los mesones $m_\pi = 139,0$ MeV, $m_K = 495$ MeV, $m_{\eta'} = 958$ MeV [21, 85, 1], obteniendo $m_u = m_d = 3,63$ MeV, $\Lambda = 1071,38$ MeV, $G_S \Lambda^2 = 10,78$, y $H \Lambda^5 = -353,29$. La masa del quark s se eligió acorde al valor fenomenológico actualizado de $m_s = 95,00$ MeV, y $m_s/m_u \simeq 26$ en concordancia con los datos publicados por el Particle Data Group [86].

Para obtener la transición de fase de primer orden, procedemos a realizar la construcción de Maxwell como explicamos en la sección 2.4. Sin embargo, es importante remarcar que no

estaremos trabajando con EdE hadrónicas y de quarks como explicamos en esa sección, si no que utilizaremos las mismas EdE que obtenemos del modelo NJL-nl, solo que calculando dos ramas distintas. La primera, yendo desde potenciales químicos bajos ($\mu \simeq 10$ MeV) hacia altos ($\mu \simeq 500$ MeV), y la segunda yendo desde potenciales químicos altos hacia bajos. En este caso, como tenemos el mismo tipo de partículas tanto para la fase confinada como para la desconfiada, podemos simplemente graficar el granpotencial en función de μ , como vemos en la Figura 4.1.

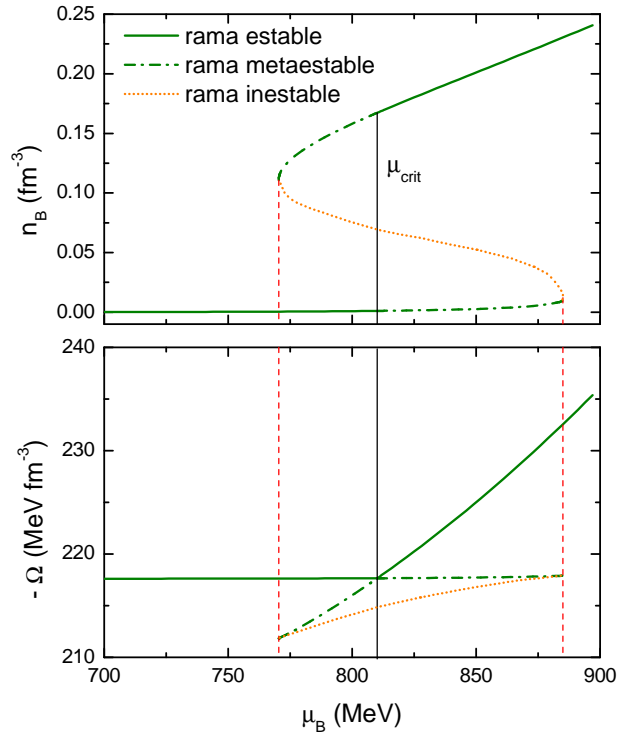


Figura 4.1: Densidad bariónica en función del potencial químico para dos ramas de la densidad bariónica (arriba) y del granpotencial termodinámico (abajo) corridas a temperatura fija: de potenciales químicos bajos y condensados no nulos hacia potenciales químicos altos, y viceversa. En la figura de arriba, los dos valores de densidades correspondientes a la recta de μ_{crit} corresponden a los dos valores del diagrama de fases en el plano (n_b, T) . En la figura de abajo el cruce de las dos ramas determina el punto de transición del diagrama de fases para cada valor de (T, μ) .

Para cada temperatura dada, al recorrer el diagrama de fases, se grafica el granpotencial en las dos ramas y el potencial químico al que se cruzan, junto con la temperatura elegida para graficar, generan un punto (T, μ) del diagrama de fases. Se comienza desde temperaturas bajas y se realiza este procedimiento barriendo un rango de temperaturas determinado. Llegado un punto crítico, la transición deja de ser de primer orden, y dejan de existir dos ramas distintas para el granpotencial. En el punto en el cual eso sucede

se encuentra el punto crítico (CEP por *critical end point* en inglés), que resulta en una transición de segundo orden. Luego de dicho punto, y hacia potenciales químicos más bajos, la transición de fase se vuelve suave o del tipo crossover. Para determinarla, utilizamos la posición del pico del calor específico, siendo éste $C_V = -T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2}$, como se muestra en la Figura 4.2.

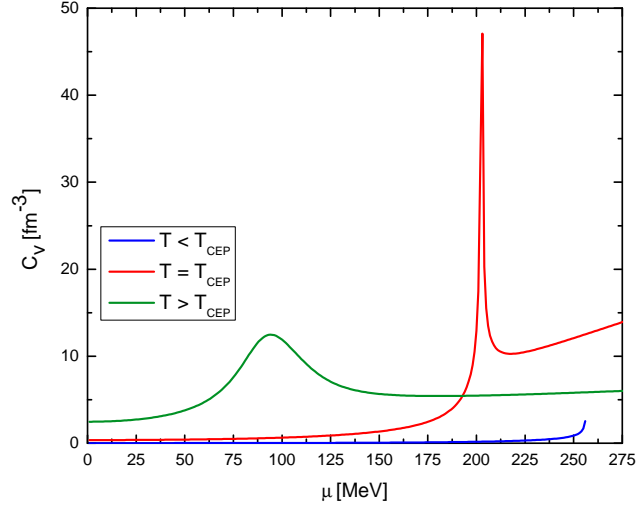


Figura 4.2: Calor específico para distintas temperaturas. El máximo determina el punto de crossover para cada valor de (T, μ) para temperaturas mayores a la temperatura crítica. Para temperaturas menores, el calor específico diverge y deja de tener un máximo definido, pues la transición pasa a ser de primer orden.

Una vez obtenidos los puntos correspondientes a la transición de primer orden, y de crossover, es posible construir los dos tipos de diagramas de fases, en los planos (T, μ) y en (T, n_b) , como se muestra en la Figura 4.3. Como se sabe de extensiones de *Lattice QCD* a potenciales químicos finitos para masas no nulas [87, 88, 89], debería haber una transición de fase de tipo crossover a potenciales químicos bajos. Por otro lado, algunas extrapolaciones para 2+1 sabores en el límite del continuo indican una temperatura crítica para potencial químico nulo $T_c(\mu = 0) \simeq 155$ MeV [90, 91, 92]. Estos dos resultados se encuentran de acuerdo con los obtenidos con las parametrizaciones utilizadas en este trabajo.

Por otro lado, a potenciales químicos altos y temperaturas bajas, se espera la transición de primer orden como hablamos anteriormente. El final de la línea de transición en el CEP no se conoce, pero está siendo investigada actualmente en laboratorios como el NICA; FAIR, J-PARK, mientras que las regiones de densidades intermedias donde se encuentra la transición tipo *crossover* está entre los objetivos del laboratorio BED, SPS en el RHIC y el CERN. Las áreas correspondientes a cada experimento se encuentran también

señaladas en la Figura 4.3 (arriba). Las líneas punteadas de la figura mencionada indican el límite de las regiones metaestables, las cuales serán explicadas luego.

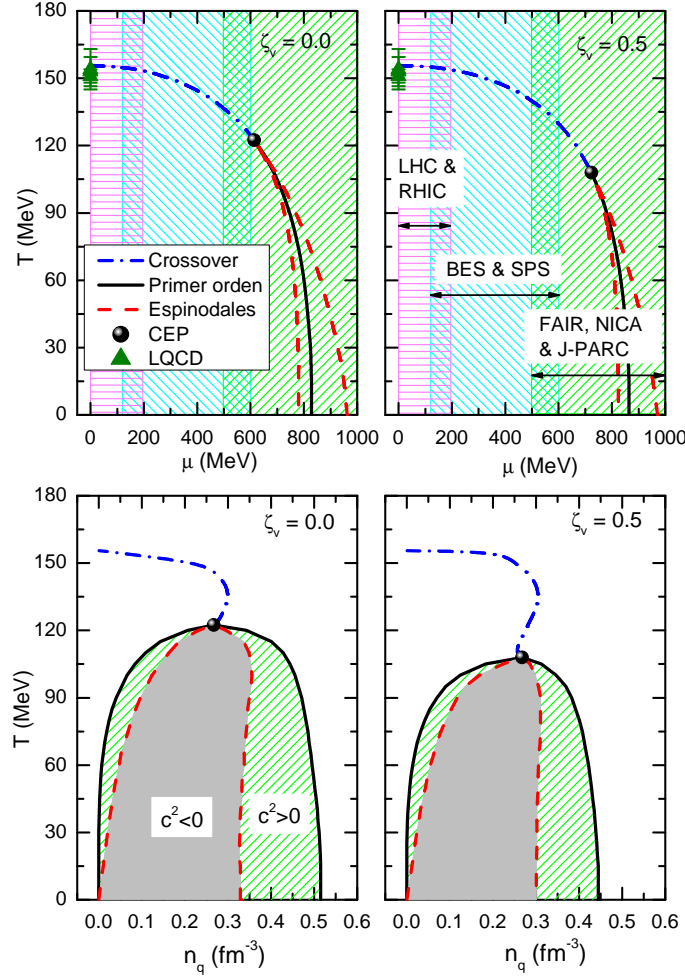


Figura 4.3: Arriba: diagramas de fase en el plano (T, μ) para distintos valores de $\zeta_V = G_V/G_S$. Abajo: lo mismo que el panel izquierdo pero en el plano (T, n_B) .

Como se demuestra en el trabajo de la referencia [93], la inclusión de interacciones vectoriales repulsivas entre quarks, encoje la línea de transición de primer orden, moviendo el CEP hacia temperaturas más bajas y potenciales químicos más altos, causando eventualmente que éste desaparezca para interacciones suficientemente fuertes. Sin embargo, los valores utilizados en este trabajo permiten siempre transiciones de fase de primer orden a bajas temperaturas. Además, se puede ver que el efecto de las interacciones vectoriales, es mover la línea de transición de primer orden a potenciales químicos mayores. Finalmente, se puede ver en el panel de abajo de la Figura 4.3 que estas interacciones provocan que las regiones metaestables (marcadas en gris) tiendan a desaparecer para valores

suficientemente grandes de ζ_V .

Además de la construcción mencionada, se pueden obtener líneas espinodales, que corresponden a regiones metaestables. Las fluctuaciones de densidades asociadas a éstas líneas pueden ser analizadas en términos de la velocidad del sonido isotérmica, dada por[94, 95]

$$c_s^2 = \frac{n_q}{\epsilon + P} \left(\frac{\partial P}{\partial n_q} \right)_T. \quad (4.66)$$

Las zonas marcadas en gris en la Figura 4.3 muestran regiones inestables del diagrama de fases en donde $c^2 < 0$. Éstas regiones se encuentran rodeadas por zonas metaestables indicadas en color verde, donde $c^2 > 0$ y las curvas punteadas rojas muestran las líneas espinodales determinadas cuándo $c^2 = 0$. En las regiones donde $c^2 < 0$, la compresibilidad $\kappa \propto n_q (\frac{\partial P}{\partial n_q})_T$ es negativa y el sistema reacciona a un incremento en la densidad (compresión) aumentando las fluctuaciones de baja densidad. Como esta región es inestable, las fluctuaciones de densidad que normalmente ocurren dentro de la zona delimitada por las líneas espinodales, separarán al sistema en regiones de baja y alta densidad. Las zonas metaestables quedan determinadas por la región comprendida entre las espinodales y las líneas de primer orden. En estas regiones, las fluctuaciones de densidad crecen a través de agregar condensados de quarks (rama izquierda), o se encojen debido a la evaporación de dichos condensados (rama derecha). Vale mencionar que para construir una EdE de materia de quarks desconfiada, se debe trabajar a potenciales químicos que sean mayores que la rama derecha de las líneas espinodales, de manera de evitar que efectos perturbativos generen la formación de mesones.

Es necesario, sin embargo, indicar una sutileza respecto del tipo de construcción del diagrama de fases que se explicó: como estamos trabajando con tres sabores de quarks, es posible que dicha construcción nos lleve a un error. Ver que el granpotencial tiene discontinuidades en las soluciones, y construir la línea de primer orden es correcto, en tanto y en cuanto no asumamos que del lado derecho del diagrama de fases los quarks se comportan como quarks libres. De hecho lo que sucede es que la discontinuidad ocurre porque los parámetros de orden de la transición quiral de los quarks u y d se anulan, por lo cual tenemos restauración de la simetría quiral para esos quarks. Sin embargo, sucede lo mismo con el quark s . Éste, al ser más masivo que los otros, mantiene el campo σ_s constante a potenciales químicos mucho más altos, y recién para potenciales del orden $\mu \simeq 450$ MeV empieza a comportarse como quark libre. Esto se puede ver claramente en la Figura 4.4. En el caso de $\zeta_V = G_V/G_S = 0$ existe una transición de fase de primer orden debido a la restauración de la simetría quiral del quark más pesado. Por otro lado, variando los valores del acoplamiento vectorial, esta transición se vuelve crossover y tanto el campo

σ_s como la densidad varían en forma continua, como se puede ver en la misma figura para el caso de $\zeta_V = 0,3$. Es posible analizar la construcción de diagramas de fases incluyendo la línea de restauración de la simetría quiral para el quark s , pero dependen fuertemente de la interacción vectorial utilizada y, como veremos luego, depende también de la inclusión o no de superconductividad en el modelo. Es útil saber, sin embargo, que para todas las interacciones vectoriales utilizadas en este trabajo $0 \leq \zeta_V \leq 0,5$, la restauración de la simetría quiral para el quark s ocurre para un potencial químico máximo cuyo valor se encuentra entre 420 MeV y 450 MeV. Mencionamos esto porque para pretender usar este modelo para la descripción de quarks libres, es importante saber que se debería trabajar a potenciales químicos mayores a los de la restauración de esta simetría, para todos los quarks. De otro modo, estaríamos trabajando con quarks u y d libres, pero con el quark s todavía confinado a su condensado quiral.

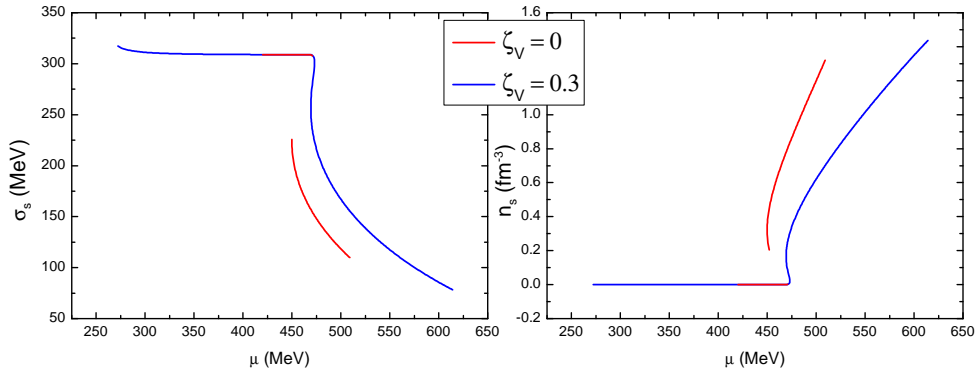


Figura 4.4: Izquierda: σ_s a $T = 0$ en función del potencial químico para $\zeta_V = 0$ y $\zeta_V = 0,3$. Derecha: lo mismo que el panel izquierdo pero para n_s . Se puede ver cómo a pesar de estar a potenciales mayores que el de desconfinamiento de los quarks u y d la densidad del quark s es nula hasta otro punto de quiebre, a partir del cual el campo σ_s empieza a bajar. También se ve como aumentando la intensidad del acoplamiento vectorial la transición pasa de ser de primer orden a ser tipo crossover.

4.6. Inclusión de leptones

Como vimos en la sección 2.2, la construcción de la ecuación de estado para modelar la materia tanto hadrónica como de quarks en las ENs, tiene que incluir leptones, para satisfacer las condiciones de equilibrio químico y conservación de carga eléctrica ya sea global o local. Según vimos, hay tres tipos de leptones que se agregan al modelo: electrones (e^-), muones (μ^-), y neutrinos de electrón (ν_e). La interacción entre los leptones y los

quarks viene dada por procesos de la interacción débil (decaimiento β y β inverso), lo cual da una relación entre los potenciales químicos de cada partícula. Sin embargo, a nivel Lagrangiano (y en consecuencia a nivel granpotencial), los leptones se agregan en el modelo de quarks como partículas libres. Por lo tanto, no es necesario ningún tratamiento de bosonización, y la regularización utilizada es la misma que la desarrollada en la sección 4.2. Por esto, podemos escribir directamente la contribución genérica regularizada de un leptón de masa m_l al granpotencial de la manera

$$\Omega_{Reg}^l(T, \mu_l) = 2T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \ln \left[1 + e^{-\frac{E_l + \mu_l}{T}} \right] + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_l - \mu_l}{T}} \right] \right\}, \quad (4.67)$$

donde $E_l = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_l^2}$ es la energía del leptón l , m_l su masa y μ_l su potencial químico. Cabe destacar que en el caso de los neutrinos, los cuales consideraremos sin masa, resulta $m_{\nu_e} = 0$ pero la ecuación (4.67) sigue siendo válida. De este modo, el granpotencial nuevo será

$$\Omega_{Reg}^{ACM}(T, \mu) \rightarrow \Omega_{Reg}^{ACM}(T, \mu) + \sum_l \Omega_{Reg}^l(T, \mu_l), \quad (4.68)$$

donde la suma sobre l se realiza sobre los distintos leptones según corresponda el caso. Por simplicidad y para no agregar índices, nos seguiremos refiriendo al granpotencial con leptones incluidos en el modelo como $\Omega_{Reg}^{ACM}(T, \mu)$ y distinguiremos cualquier otro caso explícitamente.

Hasta ahora, los potenciales químicos de los quarks se distinguían en sabor solo en los subíndices, es decir, teníamos que $\mu_u = \mu_d = \mu_s = \mu$, donde μ es el potencial químico genérico de los quarks.

Siguiendo lo explicado en la sección 2.2 según los diferentes estadios de una EN, vamos a necesitar dos formas distintas de agregar leptones. Una que incluya electrones y muones, y otra que incluya electrones y neutrinos, en cualquiera de los dos casos estas inclusiones darán como resultado que los potenciales químicos de los quarks ya no sean iguales entre sí. Para el primer caso, el de electrones y muones, la relación que tienen que cumplir estos potenciales para mantener el equilibrio químico y beta está dada por

$$\mu_u = \mu - \frac{2}{3}\mu_e \quad (4.69)$$

$$\mu_d = \mu + \frac{1}{3}\mu_e \quad (4.70)$$

$$\mu_s = \mu + \frac{1}{3}\mu_e \quad (4.71)$$

$$\mu_\mu = \mu_e, \quad (4.72)$$

De estas ecuaciones se desprenden dos cosas. La primera es que hasta ahora teníamos un único potencial químico libre que, junto con la temperatura, eran los dos parámetros que se fijaban en el sistema de ecuaciones. Ahora seguimos teniendo ese potencial, ya que $(\mu_u + \mu_d + \mu_s) = 3\mu$, pero aparece otro parámetro libre que es el potencial químico del electrón. Esto nos lleva a la segunda observación, que es que debemos encontrar una manera de fijar el potencial químico del electrón. Esto no se puede hacer arbitrariamente, sino que se realiza agregando una ecuación más a nuestro sistema, para asegurar que la ecuación de estado sea neutra de carga eléctrica localmente. Esta ecuación se escribe como

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}(n_d + n_s) - n_e - n_\mu = 0, \quad (4.73)$$

la cual debe ser agregada a nuestro sistema de ecuaciones a resolver en (4.58). En la ecuación (4.73) los n_i se refieren a las densidades de cada partícula que se obtienen derivando el granpotencial respecto del potencial químico correspondiente de manera que

$$n_i = \frac{\partial \Omega_{Reg}^{ACM}(T, \mu)}{\partial \mu_i}. \quad (4.74)$$

En el caso en el que los leptones a incluir sean neutrinos y electrones, las relaciones entre los potenciales químicos cambian, y se escriben como

$$\mu_u = \mu - \frac{2}{3}(\mu_e - \mu_{\nu_e}) \quad (4.75)$$

$$\mu_d = \mu + \frac{1}{3}(\mu_e - \mu_{\nu_e}) \quad (4.76)$$

$$\mu_s = \mu + \frac{1}{3}(\mu_e - \mu_{\nu_e}), \quad (4.77)$$

donde ahora los muones no se consideran. En este caso, vemos que al incluir el potencial químico del neutrino del electrón, tenemos un parámetro libre más para nuestro sistema de ecuaciones. Para fijarlo, se necesita agregar la ecuación que define la fracción leptónica del sistema, de manera que agregamos a nuestro sistema la siguiente relación

$$\frac{n_e + n_{\nu_e}}{n_B} - Y_L = 0, \quad (4.79)$$

donde ahora $n_B = (n_u + n_d + n_s)/3$ es la densidad de número bariónico e Y_L la fracción leptónica por barión que entrará como parámetro fijo de nuestro sistema. Cabe destacar que se fija la fracción leptónica sobre la densidad de número bariónico en lugar de hacerlo sobre la densidad total de quarks, ya que luego se juntará la EdE de los quarks con la de

los hadrones y es necesario hacerlo de manera consistente. Sin embargo, cuando hablamos puramente de ecuaciones de estado de quarks, uno podría trabajar con la densidad de quarks y pedir una fracción de leptones arbitraria sobre la densidad total de quarks y no incurriría en errores. Finalmente, en el caso de incluir los neutrinos en el modelo, la ecuación (4.73) que aseguraba la neutralidad de carga debe ser ligeramente modificada, obteniendo

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}(n_d + n_s) - n_e = 0. \quad (4.80)$$

Capítulo 5

Superconductividad de color en el modelo de quarks no local

Hasta aquí hemos desarrollado el modelo PNJL-nl con interacciones escalares y pseudoescalares atractivas, e interacciones vectoriales repulsivas. Sin embargo, es sabido que a temperatura cero, para teorías que tengan una interacción atractiva arbitraria, los fermiones son inestables frente a la formación de estados ligados [64], de manera que sería natural incluir superconductividad. El argumento es el siguiente: a $T = 0$, todos los estados de momento menor al momento de Fermi se encuentran ocupados. Como la energía libre $|E_p - \mu|$ se anula en la superficie de Fermi, se podrían crear pares de (anti)partículas sin coste de energía. Si existe una interacción de tipo atractiva entre estas partículas, la superficie de Fermi se vuelve inestable. En la teoría original de superconductividad BCS [96] esto se arregla con la formación de pares de Cooper, cuya consecuencia directa es la formación de un gap superconductor (energía necesaria para romper un par) en el espectro de excitación, provocando que no existan más niveles con energía libre nula. En el caso de la QCD, donde la interacción de intercambio de gluones es atractiva en ciertos canales, es de esperarse que se formen pares de condensados de quarks similares a los pares de Cooper, dado lo explicado anteriormente. Al haber muchos canales atractivos en la teoría, uno puede construir una gama muy amplia de interacciones que den lugar a condensados de diquarks. En este trabajo nos centraremos en el canal atractivo predominante tanto para las interacciones de intercambio de un gluón como para las mediadas por instantones [97].

5.1. Diquarks como condensados de quarks

La inclusión de diquarks parte de agregar a la acción una interacción que mezcle distintos colores y sabores de quarks. Como el tratamiento resulta más bien extenso, en esta sección nos restringiremos al Lagrangiano únicamente con la interacción entre corrientes de tipo quark-quark donde cada apareamiento posible de colores pueda dar lugar a la formación de condensados. Luego veremos que los cálculos realizados se condicen con agregar esto a lo hecho con el resto de las interacciones. En general en esta sección mantendremos cierta similitud con lo desarrollado en el trabajo de la referencia [62], con la diferencia que allí se trabaja con el modelo local en lugar del no local, y usan otras definiciones de matrices diferentes a las que usamos aquí, que son iguales a las utilizadas en el trabajo de la referencia [98]. En este trabajo la fase superconductora que consideraremos es la llamada $2SC + s$. Debido a que la masa del quark s desfavorece el apareamiento con los otros dos quarks livianos podemos considerarlo desacoplado, de manera que en la fase $2SC + s$ los condensados están formados solamente por quarks u y d . Partamos entonces de la acción

$$S_E = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) (i\not{D} + m) \psi(x) - \frac{G_D}{2} [j_D(x)]^\dagger j_D(x) \right\}, \quad (5.1)$$

con la corriente de diquarks

$$j_D(x) = \int d^4z g(z) \bar{\psi}_C \left(x + \frac{z}{2} \right) i\gamma^5 \lambda_A \lambda_{A'} \psi \left(x - \frac{z}{2} \right), \quad (5.2)$$

donde $\psi_C(x) = \gamma_2 \gamma_4 \bar{\psi}^T(x)$. Las matrices gamma las definimos como (γ, γ_4) con $\gamma_4 = i\gamma_0$. Las matrices λ_A y $\lambda_{A'}$ actúan en espacios de color y sabor respectivamente y toman únicamente los índices 2, 5, 7. Este tipo de interacción da lugar a una matriz de condensados que se puede escribir de la manera:

$$s_{AA'} = \langle \bar{\psi}_C \gamma_5 \lambda_A \lambda_{A'} \psi \rangle, \quad (5.3)$$

con $C = \gamma_2 \gamma_4$ el operador de conjugación de carga. Afortunadamente, esta matriz se puede reducir haciendo una rotación en color, llevándola a la forma

$$s = \begin{pmatrix} s_{22} & 0 & 0 \\ s_{52} & s_{55} & 0 \\ s_{72} & s_{75} & s_{77} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Se puede ver (por ejemplo en los trabajos de las referencias [99, 100]) que en el régimen de intercambio de un gluón, las componentes no diagonales resultan despreciables respecto de las otras, por lo cual las tomaremos como nulas, y nos quedaremos solo con los elementos s_{22} , s_{55} y s_{77} . Vale la pena destacar algo que mencionamos brevemente al final de la sección 4.4: la interferencia con el lazo de Polyakov. Si bien las rotaciones que se hicieron y hecho de despreciar las componentes no diagonales llevan la matriz de condensados a una forma matemáticamente tratable, cuando incluimos el lazo de Polyakov y queremos rotar en color, resulta prácticamente imposible llevar todo a una forma diagonal. Es por esto que en general la literatura no incluye al mismo tiempo estos dos efectos. Se podría argumentar que el parámetro de orden Φ del lazo de Polyakov es pequeño a bajas temperaturas, y por ende preferir trabajar con un modelo que incluya fase superconductora de color y no el lazo de Polyakov en este régimen. Si bien el argumento parece válido en principio, lo que no se conoce aún es cómo interfiere la inclusión de diquarks en los valores de expectación del parámetro de orden Φ . Es decir, si bien este último a temperaturas bajas es despreciable, podría ser que su comportamiento cambiara drásticamente al incluir diquarks justamente por los términos no diagonales de la matriz de condensados. Por lo tanto, pensar que una aproximación únicamente incluyendo superconductividad de color en el modelo a temperaturas bajas es lo mismo que incluir ambas contribuciones, sería incurrir en un error. Es por esto que en este trabajo analizaremos la superconductividad de color separada de la teoría con el lazo de Polyakov, salvo para el caso de temperatura nula, para el cual esta última contribución es estrictamente nula. Por otro lado, una vez hecha la rotación en sabor que permite identificar a los diquarks, se pueden escribir las interacciones escalares, pseudoescalares y vectoriales que vimos anteriormente de tal forma que den como resultado el mismo tipo de interacción para los campos escritos en la nueva base. Esto es lo que permite, sin perder generalidad, agregar las demás interacciones después de haber hecho el tratamiento de la inclusión de diquarks.

Volviendo al tratamiento de la matriz, lo que tenemos ahora son tres condensados que corresponden a distintos tipos de apareamiento entre quarks, los cuales se muestran en la tabla 5.1. Como tenemos tres condensados de quarks diferentes, la bosonización nos

Condensado	$s_{22} = \langle \bar{\psi} \gamma_5 \lambda_2 \lambda_2' \psi \rangle$	$s_{55} = \langle \bar{\psi}_C \gamma_5 \lambda_5 \lambda_5 \psi \rangle$	$s_{77} = \langle \bar{\psi}_C \gamma_5 \lambda_7 \lambda_7 \psi \rangle$
Pares de diquarks	$(u_r, d_g), (u_g, d_r)$	$(d_g, s_b), (d_b, s_g)$	$(s_b, u_r), (s_r, u_b)$

Tabla 5.1: Estructura de color y sabor de los distintos condensados de diquarks.

llevará a tener tres campos nuevos, que llamaremos Δ_i , con su tres respectivos campos auxiliares, que llamaremos D_i . Veamos como queda la estructura del operador A que

definimos anteriormente, que es al cual le vamos a tener que calcular el determinante. Como dicho operador es la inversa del propagador $S(p)$, utilizaremos el nombre de este último para no confundir notación. Lo que quedará en las integrales de camino en la parte fermiónica luego de extender a temperatura y potencial químico finitos es:

$$S^{-1}(p) = \begin{pmatrix} -\not{p} + \hat{M} + i\hat{\mu}\gamma^4 & i \sum_A \Delta_A^p \gamma_5 \lambda_A \lambda_A \\ i \sum_A (\Delta_A^p)^* \gamma_5 \lambda_A \lambda_A & -\not{p} + \hat{M} - i\hat{\mu}\gamma^4 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

donde $\Delta_A^p = \Delta_A g(p)$. La matriz $S^{-1}(p)$ escrita anteriormente solo esta expandida en los índices de Nambu- Gorkov (que aparecen al escribir los campos en función de los conjugados de carga, duplicando el espacio del operador). Sin embargo, ahora los potenciales químicos tienen estructura de sabor y de color, por lo tanto son matrices de 9x9 en ese espacio, con índices μ_{fc} . La matriz de masas \hat{M} tienen índices de sabor, pero resulta útil conservar los índices de sabor y color para no perder generalidad. Esto nos servirá para incluir las interacciones vectoriales y escalares, donde la masa está afectada por el regulador, que a su vez depende del potencial químico, por lo que también tendrá índices de sabor y color. Si tenemos en cuenta todos los índices de Dirac, sabor, color y Nambu-Gorkov, el operador al que le tendremos que calcular el determinante es una matriz de 72x72, prácticamente imposible de tratar matemáticamente de forma directa. Sin embargo, reacomodando filas y columnas, y pasando a la notación de traza del logaritmo, podemos dividirla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\ln[S^{-1}(p)]\} &= \text{Tr}[\ln(D_{ug,dr})] + \text{Tr}[\ln(D_{ur,dg})] + \text{Tr}[\ln(D_{ub,sr})] + \text{Tr}[\ln(D_{ur,sb})] \\ &+ \text{Tr}[\ln(D_{db,sg})] + \text{Tr}[\ln(D_{dg,sb})] + \text{Tr}[\ln(D_{ur,dg,sb})], \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde las matrices M corresponden a distintos bloques independientes de $S^{-1}(p)$. Las primeras seis mezclan solo dos especies de quarks y color (fase 2SC), y la séptima incluye la estructura de bloqueo de color y sabor (fase CFL). Los diferentes condensados que aparecen corresponden a las diferentes combinaciones de sabor de quarks, es decir

$$\Delta_{ud} = \Delta_{du} = \Delta_2 = \Delta_2^* \quad (5.7)$$

$$\Delta_{us} = \Delta_{su} = \Delta_5 = \Delta_5^* \quad (5.8)$$

$$\Delta_{ds} = \Delta_{sd} = \Delta_7 = \Delta_7^*. \quad (5.9)$$

Por lo explicado al principio de la sección, estamos interesados en trabajar en la fase $2SC + s$, asumiendo que los condensados de quarks u y d aparecen antes que los demás, por lo cual trabajaremos en el caso en que $\Delta_5 = \Delta_7 = 0$. Esto no es estrictamente cierto,

pero debido a que la masa del quark s es mucho mayor a las del u y el d , es de esperarse que si aparecen diquarks, predomine el condensado Δ_2 sobre los demás, al menos en las densidades a las cuales recién se empiezan a formar. Por otro lado, en el contexto del modelo no local el tratamiento del determinante de la matriz correspondiente a la fase CFL es bastante complejo, por lo que en una primera aproximación resulta muy útil anular los otros condensados. Haciendo esto, la única estructura de diquarks que queda toma la forma

$$D_{ud} = \begin{pmatrix} -\not{p} + \hat{M} + i\hat{\mu}\gamma^4 & i\Delta_2^p\gamma^5 \\ i\Delta_2^p\gamma^5 & -\not{p} + \hat{M} - i\hat{\mu}\gamma^4 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

El determinante de esta matriz es perfectamente resoluble, por lo cual una vez hecho eso podemos calcular el granpotencial. Antes de eso, veamos cómo influyen los campos auxiliares debido a la superconductividad de color en el granpotencial. Del mismo modo que en la sección 3.3 antes de diagonalizar, el granpotencial incluirá ahora términos de la forma

$$\Omega \supset \Delta D + \frac{G_D}{2} D^2, \quad (5.11)$$

al igual que sucedía con los campos σ_a S_a en la ecuación (3.32). Ahora bien, la diagonalización que se realiza después para la base de los campos σ_a , S_a θ_a y V_a , se generaba debido a que la suma de las matrices de Gell-Man por los campos $\lambda_0\sigma_0 + \lambda_3\sigma_3 + \lambda_8\sigma_8$ resultaba diagonal en sabor, por lo cual los campos auxiliares con índices a podían reescribirse en una base diagonal de sabor. Como el campo Δ_2 y su auxiliar D ya quedan definidos anteriormente sin recorrer esos índices y sin necesitar diagonalización, se incluirán en el granpotencial sin modificación alguna respecto de la ecuación (5.11).

Por otro lado al considerar $\Delta_5 = \Delta_7 = 0$, las matrices $D_{f,f'}$ de la ecuación (5.6) que involucran al quark s no tienen componentes fuera de la diagonal, y las únicas interacciones que aparecen son las que se encuentran en las masas dinámicas y los corrimientos del potencial químico debido a la interacción vectorial. Por lo tanto, todos los términos relacionados al quark s en el granpotencial quedan desacoplados y no sufren cambios respecto del tratamiento que hicimos anteriormente. De esta manera, podemos escribir el granpotencial correspondiente a la superconductividad de color, recordando que dejamos la masa vestida M en lugar de m para permitir incluir luego los corrimientos generador en la masa por las

interacciones escalares. Finalmente, el granpotencial queda de la forma

$$\begin{aligned}
\Omega_{D_{iq},ud}^{ACM} = & - 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_c \left\{ \frac{1}{2} \ln |A_c|^2 - \text{Real} \left[\ln \left(p_{uc}^+{}^2 + m_u^2 \right) \right] - \text{Real} \left[\ln \left(p_{dc}^+{}^2 + m_d^2 \right) \right] \right\} \\
& - \Delta D + \frac{G_D}{2} D^2 - \sum_{f,c} \frac{\Theta(\mu_{fc} - m_f)}{24\pi^2} \left[(-5m_f^2 + 2\mu_{fc}^2) \mu_{fc} \sqrt{\mu_{fc}^2 - m_f^2} \right. \\
& \left. + 3m_f^4 \ln \left(\frac{\mu_{fc} + \sqrt{\mu_{fc}^2 - m_f^2}}{m_f} \right) \right], \tag{5.12}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_c = & \left(p_{uc}^+{}^2 + M_{uc}^2 \right) \left(p_{dc}^-{}^2 + M_{dc}^{*2} \right) \\
& + (1 - \delta_{bc}) \Delta^2 \left(\Delta^2 + 2p_{uc}^+ p_{dc}^- + 2M_{uc} M_{dc}^* \right), \tag{5.13}
\end{aligned}$$

$$p_{fc}^\pm = \left(p_0 \mp i\mu_{fc}, \mathbf{p} \right), \tag{5.14}$$

$$\Delta^p = \Delta g \left(\frac{[p_{ur}^+ + p_{dr}^-]^2}{4} \right). \tag{5.15}$$

Veamos ahora conceptualmente cómo se llega a esa forma del término A_c . Por un lado, de la ecuación (5.6), al eliminar los condensados que incluyen al quark s , aparece una nueva matriz $D_{ur,dg}$, por lo cual junto con el primer término de esa ecuación nos permite decir que los colores rojo y verde son intercambiables para el quark u y d . El quark s queda totalmente desacoplado de las interacciones de color, así como el color azul. Luego, utilizando esto y la propiedad de números complejos $|Z|^2 = ZZ^*$, es sencillo (aunque trabajoso) llegar a la forma mencionada para el término A_c . Veamos que el último término de la ecuación (5.13) se anula tanto cuando el color es azul, así como también cuando $\Delta = 0$. Esto es porque el condensado Δ solo está presente cuando los colores de los quarks son rojo y verde, además si el condensado se anula se recupera el modelo no local descrito en los capítulos 3 y 4 como era de esperarse. Para todo el resto de los efectos, la única contribución que recibirá el término de A_c al incluir las interacciones escalares, pseudoescalares, y vectoriales, vendrá en un corrimiento del potencial químico y una contribución a la masa vestida M_{fc} para cada cada sabor y color. Introduciendo estas interacciones donde corresponden, y sumando al granpotencial los campos auxiliares que vimos anteriormente, completamos el modelo para los tres sabores y colores de quarks, con todos los acoplamientos vistos. Así, el granpotencial para la fase superconductora de color $2SC + s$ queda escrito de la

manera

$$\begin{aligned}
\Omega = & - 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_c \text{Real} \left\{ \ln \left[\frac{q_{sc}^{+2} + M_{sc}^2}{p_{sc}^2 + m_s^2} \right] \right\} \\
& - 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_c \left\{ \frac{1}{2} \ln |A_c|^2 - \text{Real} \left[\ln \left(p_{uc}^{+2} + m_u^2 \right) \right] - \text{Real} \left[\ln \left(p_{dc}^{+2} + m_d^2 \right) \right] \right\} \\
& - \frac{1}{2} \left[\sum_f \left(\sigma_f S_f + \frac{G_S}{2} S_f^2 + \theta_f V_f - \frac{G_V}{2} V_f^2 \right) + \frac{H}{2} S_u S_d S_s + 2\Delta D + G_D D^2 \right] \\
& - \sum_{f,c} \frac{\Theta(\mu_{fc} - m_f)}{24\pi^2} \left[(-5m_f^2 + 2\mu_{fc}^2) \mu_{fc} \sqrt{\mu_{fc}^2 - m_f^2} \right. \\
& \left. + 3m_f^4 \ln \left(\frac{\mu_{fc} + \sqrt{\mu_{fc}^2 - m_f^2}}{m_f} \right) \right], \tag{5.16}
\end{aligned}$$

donde ahora el término A_c incluye los momentos corregidos por cada potencial químico

$$\begin{aligned}
A_c = & \left(q_{uc}^{+2} + M_{uc}^2 \right) \left(q_{dc}^{-2} + M_{dc}^{*2} \right) \\
& + (1 - \delta_{bc}) \Delta^{p^2} \left(\Delta^{p^2} + 2q_{uc}^+ q_{dc}^- + 2M_{uc} M_{dc}^* \right), \tag{5.17}
\end{aligned}$$

$$q_{fc}^\pm = \left(p_0 \mp i \left[\mu_{fc} - \theta_f g \left(p_{fc}^\pm \right) \right], \mathbf{p} \right), \tag{5.18}$$

$$p_{fc}^\pm = \left(p_0 \mp i \mu_{fc}, \mathbf{p} \right), \tag{5.19}$$

$$M_{fc} = m_f + \sigma_f g \left(p_{fc}^{+2} \right), \tag{5.20}$$

$$\Delta^p = \Delta g \left(\frac{[p_{ur}^+ + p_{dr}^-]^2}{4} \right). \tag{5.21}$$

Con esto completamos el modelo con diquarks a temperatura cero para el caso de la fase $2SC+s$, más las interacciones escalares, pseudoescalares y vectoriales vistas anteriormente. La extensión a temperatura finita, afortunadamente, resulta directa. En este caso, al haber ya realizado la regularización de la parte libre, podemos reutilizar el reemplazo (4.25), teniendo en cuenta que los términos multiplicados por $\Theta(\mu_{fc} - m_f)$ de la ecuación (5.16) hay que reemplazarlos por las integrales de la parte libre regularizada, como hicimos cuando regularizamos el caso de fermiones libres, y con eso se termina el proceso del cálculo analítico. Debido a que las ecuaciones resultan extensas, invitamos al lector a leer el apéndice B para revisarlas.

5.2. Neutralidad de carga eléctrica y de color para diquarks en estrellas de neutrones

Hasta aquí hemos visto cómo introducir diquarks en el modelo que habíamos desarrollado en los capítulos 3 y 4. Sin embargo, a menos que incluyamos en el modelo neutralidad de carga eléctrica y de color, cada quark tendrá tres potenciales químicos de color independientes, lo que junto con los tres sabores de quarks nos da una matriz de potenciales de 9×9 . Esto nos conduce a dos problemas: primero, nuestro sistema tiene demasiados parámetros libres, segundo, nos falta imponer las condiciones físicas que se requieren en el contexto de las EN, que es lo que queremos modelar. Para esto, sabemos que la materia en estos objetos se encuentra en equilibrio químico, lo que, como vimos, nos lleva a las condiciones de neutralidad de carga incluyendo leptones. Para que estas condiciones se cumplan cuando hay diquarks, sin embargo, hace falta que la materia, además de ser neutra eléctricamente, sea neutra de color. Incluiremos entonces leptones al igual que en los casos anteriores, pero nos mantendremos en el caso más simple de incluir solo electrones y muones. Recordando las condiciones de neutralidad de carga del capítulo anterior, en el caso de no incluir diquarks teníamos que

$$n_Q = \sum_c \left[\frac{2}{3} n_{u,c} - \frac{1}{3} (n_{d,c} + n_{s,c}) \right] - n_e - n_\mu = 0, \quad (5.22)$$

donde esta ecuación es idéntica a la ecuación (4.73), pero sumando sobre color en cada densidad de quarks. Si recordamos que cada densidad es la derivada del granpotencial respecto a cada potencial químico, esta última condición se cumplía implícitamente en los casos anteriores, ya que los potenciales químicos no tenían índices de color (o eran iguales para cada color, formalmente). Ahora, como tenemos dichos índices, podemos definir las densidades de color de la manera

$$n_c = \frac{\partial \Omega^{ACM}}{\partial \mu_{fc}}. \quad (5.23)$$

Ahora bien, en lugar de trabajar con las densidades totales de color, es útil definir las combinaciones lineales:

$$n = 3n_B = n_u + n_d + n_s \quad (5.24)$$

$$n_3 = n_r - n_g \quad (5.25)$$

$$n_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} (n_r + n_g - 2n_b), \quad (5.26)$$

donde n_B es la densidad de número bariónico y el par (n_3, n_8) describe asimetrías de color. Como en nuestro caso tenemos una simetría entre el color rojo y verde, resulta $n_3 = 0$ por lo cual $\mu_{fr} = \mu_{fg}$. Tenemos entonces tres cargas conservadas $\{n, n_8, n_Q\}$ relacionadas a tres potenciales químicos independientes $\{\mu, \mu_8, \mu_e\}$. La relación entre estos potenciales químicos y los de los quarks está dada por los generadores de transformaciones en sabor y color respectivamente, siendo

$$\mu_{ur} = \mu_{ug} = \mu - \frac{2}{3}\mu_e + \frac{1}{2\sqrt{3}}\mu_8, \quad (5.27)$$

$$\mu_{ub} = \mu - \frac{2}{3}\mu_e - \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_8, \quad (5.28)$$

$$\mu_{dr} = \mu_{dg} = \mu + \frac{1}{3}\mu_e + \frac{1}{2\sqrt{3}}\mu_8, \quad (5.29)$$

$$\mu_{db} = \mu + \frac{1}{3}\mu_e - \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_8, \quad (5.30)$$

$$\mu_{sc} = \mu_{dc}. \quad (5.31)$$

Dadas estas relaciones, imponiendo las neutralidades $n_8 = n_Q = 0$, junto con el sistema de ecuaciones (4.58)-(4.64), nos permiten quedarnos con un único parámetro libre, que elegimos será el potencial de quarks μ . Debido a su longitud, las densidades de partículas por color y otras cantidades termodinámicas para el caso de superconductividad de color se presentan en el apéndice B. Las condiciones mencionadas aseguran obtener solución para el granpotencial, pero esta solución no siempre es única. Por ejemplo, a potenciales químicos altos, la fase superconductora $2SC + s$ se superpone con la fase de plasma de quarks y gluones. En el plano (P, μ_B) , donde $\mu_B = 3\mu$, es fácil ver que la solución con diquarks tiene más presión para un mismo potencial químico que la solución sin diquarks. Como en el caso de temperatura cero el potencial químico es igual a la energía de Gibbs por partícula, la fase de menor energía de Gibbs será la más favorable, resultando así la fase $2SC + s$ la preferida, como se ve en la Figura 5.1.

Vale mencionar que ahora tenemos no solo dos fases en juego, si no que hay que seguir considerando la fase que tiene el condensado $\langle s\bar{s} \rangle$ distinto de cero, donde el quark s aún no se desacopló y se mantiene que $n_s = 0$. Para distintos valores de interacción vectorial y acoplamiento de diquarks (G_V, G_D) , es posible que se desconfinen el quark s antes de que se generen diquarks, o por el contrario, que se creen diquarks antes de que se desconfinen el quark s . Si llamamos fase (NQM_{ud}) a la fase que tiene quarks u y d libres¹, pero densidad nula del quark s ($n_s = 0$), fase (NQM) a la que tiene los tres quarks desconfiados y fase

¹Para aliviar la lectura en las explicaciones de este capítulo entendemos 'libres' como 'desconfinados', es decir con el condensado $\langle q\bar{q} \rangle$ nulos, pero no debe confundirse con partículas estrictamente libres.

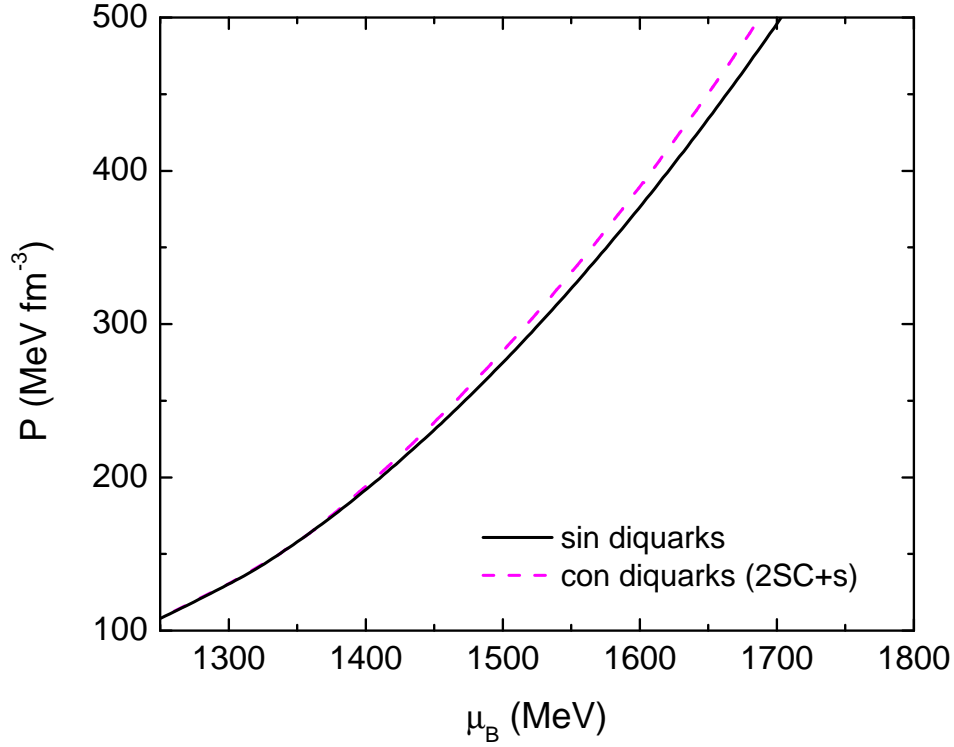


Figura 5.1: Ecuaciones de estado para la fase $2SC + s$ y la de materia normal de quarks (NQM).

($2SC + s$) a la que tiene quarks s libres y gap superconductor distinto de cero, podemos distinguir dos transiciones que se muestran en la Figura 5.2: la primera de (NQM) a ($2SC + s$). Es decir, los quarks se comportan como quarks libres antes de transicionar a la fase superconductora de color. Esto sucede cuando la interacción vectorial es bastante alta ($\zeta_V \gtrsim 0,2$). La otra transición es de fase (NQMud) a fase ($2SC + s$), es decir, el quark s sigue formando parte de los condensados quirales $\langle \bar{s}s \rangle$, y la transición provoca un salto en la densidad n_s , es decir que los condensados se rompen. Esto genera un salto más grande en n_s respecto de la transición anterior, y la mueve hacia potenciales químicos más bajos. En resumen, disminuir la interacción vectorial provoca que la transición a materia superconductora ocurra a potenciales químicos más bajos, pero a costa de desconfinar más cantidad quarks s .

El hecho de que la fase superconductora de color ocurra antes o después del desacople del quark s de su condensado quiral, es un actualmente un tema de debate [101], y como acabamos de ver depende fuertemente de los parámetros del modelo utilizado. Más aún, cambiar el acoplamiento de diquarks $\zeta_D = G_D/G_S$ compite también moviendo a potenciales químicos mayores (o menores) la transición de fase. El análisis de la estructura del

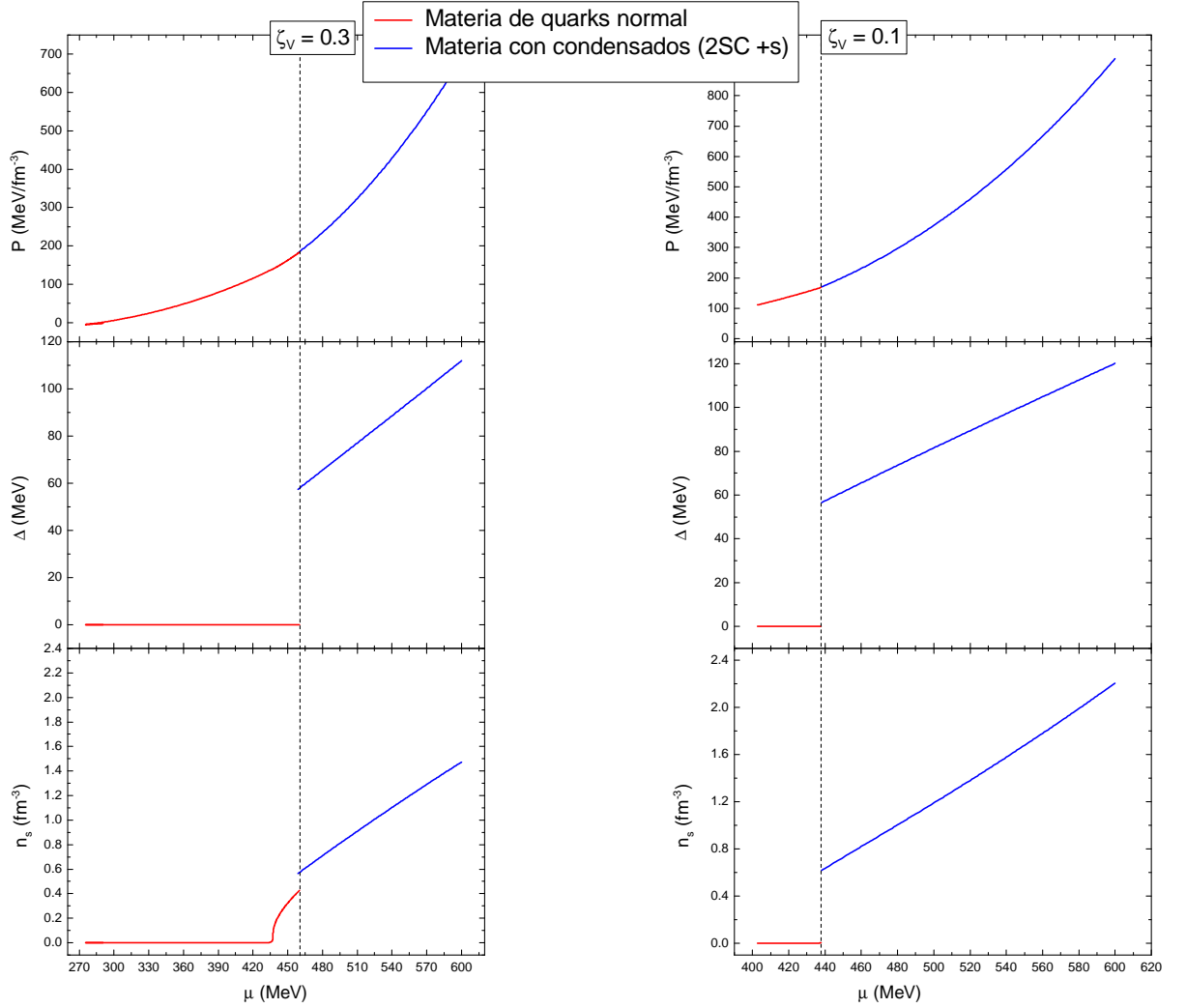


Figura 5.2: Ecuación de estado, campo Δ y densidad n_s para $\zeta_V = 0,3$. En el panel derecho se grafica lo mismo para $\zeta_V = 0,1$. Se ve cómo reducir la interacción vectorial provoca que la materia superconductora ocurra a menor potencial químico, desconfinando más cantidad de quarks s .

diagrama de fases completo para materia de quarks a temperatura finita se vuelve aún más complejo. Los puntos en el plano (T, μ) en los cuales aparece la fase (2SC + s), más la competencia con el desconfinamiento del quark s resultan no solo computacionalmente costosos de conseguir, sino que dependiendo de los parámetros de interacción vectorial utilizados las transiciones pueden resultar de primer orden o *crossover*, lo que genera una variedad de diagramas de fase que están fuera del alcance de este trabajo. Es importante remarcar, sin embargo, que para construir las EdE híbridas con un modelo hadrónico que incluya hiperones, la condición fuerte que se le debe pedir a la EdE de materia de quarks,

es que tenga quarks s desconfiados, es decir densidad $n_s \neq 0$. En este trabajo nos restringiremos al valor más recomendado en la literatura para la constante de acoplamiento de diquarks $\zeta_D = (3/4)$ [78], y tomaremos al acoplamiento vectorial como parámetro libre. Las elecciones que haremos dependerán del tipo de interfase hadrón-quark utilizada para la EdE híbrida, así como de las cotas observacionales respecto a la determinación de los valores de las masas máximas medidas en EN. Estos resultados y su análisis correspondiente se presentarán en el Capítulo 7.

Capítulo 6

Materia hadrónica y modelo DDRMF

Para terminar completar la descripción de la materia dentro de las ENs, necesitamos, además de los modelos de quarks mencionados, un modelo que describa la materia hadrónica. Si bien antiguamente se pensaba que la materia nuclear estaba compuesta únicamente por protones y neutrones, con el avance de la física experimental y el descubrimiento del espectro de bariones y mesones, fue necesario mejorar los modelos teóricos para reproducir las observaciones experimentales. En este contexto, John Dirk Walecka y sus colaboradores construyeron un modelo en 1974 que permitía describir las interacciones nucleón-nucleón. Este modelo está basado en un tratamiento fenomenológico de los grados de libertad hadrónicos, dentro de una teoría cuántica de campos. Las primeras versiones del modelo consideraban mesones escalares (σ) y vectoriales (ω), acoplados a los campos bariónicos, mientras que nuevas versiones incluyen también un mesón responsable por las interacciones barión-barión (ρ). Estos campos mesónicos en general son aproximados por sus valores medios, y reciben el nombre de teorías de campo medio relativistas o RMF (por *Relativistic Mean Field*). El primer modelo incluía únicamente interacciones lineales entre los campos bariónicos y los campos σ y ω , pero esto llevaba a valores muy altos del módulo de compresibilidad nuclear $K_0 = 545$ MeV, mientras que distintos análisis muestran que debería estar en el rango $K_0 \simeq 200$ MeV - 300 MeV [102, 103]. Por esto, primero se pensó en incluir interacciones cúbicas con el mesón σ obteniendo así mejores valores para el módulo de compresibilidad [104]. Luego, Bodmer [105] propuso una auto-interacción cuártica para el mesón ω para obtener un coeficiente positivo de la auto interacción cuártica escalar, dado que un coeficiente negativo para dicha interacción resultaba en un espectro de energía que no estaba acotado por debajo. La diferencia en las

predicciones de estos modelos para las masas de las ENs son realmente significativas. Los modelos sin interacciones cúbicas y cuárticas predicen masas extremadamente grandes, del orden de $2.8 M_{\odot}$, en contraste con aquellos que predicen $1.8 M_{\odot}$ y que incluyen dichas interacciones. Actualmente, estos modelos se mejoraron, y además se incluyen constantes de acoplamiento dependientes de la densidad bariónica, cuyas parametrizaciones se abrevian como DDRMF (por *Density Dependent RMF*). Esta inclusión de la dependencia con la densidad resulta en una redundancia del efecto de las interacciones cúbicas y cuárticas para los mesones σ y ω , por lo cual los modelos DDRMF, en general, no incluyen los potenciales efectivos explícitos correspondientes a dichas interacciones. Dado que el tratamiento de los modelos DDRMF incluye ampliamente lo necesario para explicar los modelos RMF, en las secciones siguientes explicaremos en detalle los primeros, comentando brevemente las modificaciones necesarias para el tratamiento sin dependencia de la densidad.

6.1. Teoría de campo medio relativista dependiente de la densidad

Para modelar la materia hadrónica existente en las estrellas de neutrones, utilizamos la aproximación DDRMF que describe las interacciones barión-barión en términos de campos mesónicos. Como mencionamos, los modelos DDRMF son una extensión de los modelos RMF cuyas constantes de acoplamiento no dependen de la densidad. Este tipo de extensiones tienen en cuenta efectos del medio haciendo que las constantes de acoplamiento mesón-barión dependan de la densidad de bariones [106]. Esta dependencia es extraída de propiedades de materia de núcleos finitos, haciendo que estos modelos ajusten mejor a los datos empíricos que los modelos RMF [107].

Dada la imposibilidad de modelar las interacciones entre todas las partículas en una EN, los valores de los campos mesónicos se igualan a sus valores medios en la aproximación RMF. Estos mesones son: un mesón escalar (σ) que describe la atracción entre bariones, un mesón vectorial (ω) que describe la repulsión y un mesón isovectorial (ρ) que describe la interacción barión-barión en sistemas de isospín asimétrico. El pión (π), que tiene un rol primario en la descripción de dichas interacciones, es impar, por lo cual su campo se anula en la aproximación RMF [22]. Existen otros mesones con quarks s que describen las interacciones entre bariones, pero debido a la falta de datos empíricos existentes para acotar los valores de las constantes de acoplamiento, se excluyen usualmente de estos modelos.

Entre los bariones B que pueden existir en las EN están los bariones del octeto, compuesto por los nucleones $N = \{n, p\}$, los hiperones $Y = \{\Lambda, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-\}$ y el

cuarteto de resonancias delta $\Delta(1232) = \{\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-\}$, siendo entonces $B = \{N, Y, \Delta\}$. El Lagrangiano para las interacciones entre bariones es [108, 22]

$$\mathcal{L}_{Bariones} = \sum_B \bar{\psi}_B \left\{ \gamma_\mu \left[i\partial^\mu - g_{\omega B}(n)\omega^\mu - \frac{1}{2}g_{\rho B}(n)\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \right] - [m_b - g_{\sigma B}(n)\sigma] \right\} \psi_B, \quad (6.1)$$

donde $g_{\sigma B}(n)$, $g_{\omega B}(n)$ y $g_{\rho B}(n)$ son las constantes de acoplamiento entre mesones y bariones, n es la densidad bariónica numérica y $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ son las matrices de Pauli y γ^μ las matrices de Dirac. Las constantes de acoplamiento mesón-barión se toman dependientes de la densidad, de manera que, dada la densidad de saturación nuclear n_0 , resulten

$$g_{iB}(n) = g_{iB}(n_0)f_i(x), \quad (6.2)$$

donde i recorre la lista de mesones σ, ω, ρ , $x = n/n_0$ y las f_i dan la forma funcional de la dependencia con la densidad. Usualmente la prescripción para estas funciones está dada por [109]

$$f_i(x) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2}, \quad (6.3)$$

para $i = \sigma, \omega$ y

$$f_\rho(x) = e^{[-a_\rho(x-1)]}. \quad (6.4)$$

Los parámetros de las funciones de las ecuaciones (6.3) y (6.4) $\{a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma, d_\sigma, a_\omega, b_\omega, c_\omega, d_\omega, a_\rho\}$, los valores de las constantes de acoplamiento mesón-nucleón a n_0 $\{g_{\sigma N}(n_0), g_{\omega N}(n_0), g_{\rho N}(n_0)\}$ y la masa del mesón escalar m_σ se ajustan todos a las propiedades de saturación de la materia nuclear a n_0 , y a las propiedades de núcleos finitos, incluyendo energías de ligadura, carga y radio de difracción, separaciones espín-órbita, etc.. [110, 111]. El Lagrangiano para los leptones $\lambda = \{e^-, \mu^-\}$ es

$$\mathcal{L}_{Leptones} = \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda, \quad (6.5)$$

y Lagrangiano de la parte mesónica está dado por

$$\mathcal{L}_{Mesones} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu}, \quad (6.6)$$

donde $\omega_{\mu\nu} = (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu)$ y $\boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} = (\partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu)$. El Lagrangiano final del sistema queda dado por

$$\mathcal{L}_{DDRMF} = \mathcal{L}_{Bariones} + \mathcal{L}_{Leptones} + \mathcal{L}_{Mesones}. \quad (6.7)$$

Las ecuaciones para los campos bariónicos y mesónicos se obtienen evaluando las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre el Lagrangiano total del sistema. Luego de eso, se toma la aproximación de campo medio relativista asumiendo que la materia se encuentra uniformemente distribuida y estática en su estado de mínima energía[22]. De esta manera, los campos $\{\sigma, \omega, \rho\}$, son reemplazados por sus valores medios $\{\bar{\sigma}, \bar{\omega}, \bar{\rho}\}$, al igual que las corrientes bariónicas. Teniendo en cuenta dicha aproximación, y las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_B g_{\sigma B}(n) \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle - m_\sigma^2 \bar{\sigma} = 0 \quad (6.8)$$

$$\sum_B g_{\omega B}(n) \langle \psi_B^\dagger \psi_B \rangle - m_\omega^2 \bar{\omega} = 0 \quad (6.9)$$

$$\sum_B g_{\rho B}(n) I_{3B} \langle \psi_B^\dagger \psi_B \rangle - m_\rho^2 \bar{\rho} = 0 \quad (6.10)$$

$$\sum_B \left(\frac{\partial g_{\omega B}}{\partial n} \langle \psi_B^\dagger \psi_B \rangle \bar{\omega} + \frac{\partial g_{\rho B}}{\partial n} I_{3B} \langle \psi_B^\dagger \psi_B \rangle \bar{\rho} - \frac{\partial g_{\sigma B}}{\partial n} \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle \bar{\sigma} \right) - \Sigma_r = 0, \quad (6.11)$$

donde I_{3B} es la proyección de isospín de cada barión en la dirección 3. Los valores de expectación de las corrientes bariónicas en la aproximación de campo medio, son las densidades escalares, que a temperatura cero están dadas por

$$\begin{aligned} n_B^S &= \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle = \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_B} \frac{m_B^*(\bar{\sigma})}{\sqrt{k^2 + m_B^*(\bar{\sigma})}} k^2 dk \\ &= \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \left(\frac{m_B^*}{2} \right) \left[k_B E_B^* - m_B^{*2} \log \left(\frac{E_B^* + k_B}{m_B^*} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.12)$$

y la densidad de número bariónico (densidad vectorial)

$$n_B = \langle \psi_B^\dagger \psi_B \rangle = \frac{2J_B + 1}{6\pi^2} k_B^3, \quad (6.13)$$

donde J_B es el espín y k_B el momento de Fermi,

$$m_B^* = m_B - g_{\sigma B}(n) \bar{\sigma}, \quad (6.14)$$

es la masa efectiva y $E_B^* = \sqrt{k^2 + m_B^*(\bar{\sigma})}$ es la energía de Fermi de la especie bariónica B.

Para determinar la densidad de energía y presión a una densidad bariónica fija, las ecuaciones de los campos deben ser resueltas conjuntamente con la condición de neutralidad de carga eléctrica, en el contexto en el que nos interesa trabajar, que es el de ENs, es

decir

$$\sum_B n_B q_B + \sum_\lambda n_\lambda q_\lambda = 0, \quad (6.15)$$

donde q_B y q_λ son las cargas eléctricas bariónicas y leptónicas respectivamente. El número bariónico debe ser conservado de manera que

$$n - \sum_B n_B = 0. \quad (6.16)$$

El momento de Fermi de los bariones está relacionado con el del neutrón de manera que la materia se encuentre en equilibrio químico tiene que satisfacer, a temperatura cero,

$$\mu_B = \mu_n - q_B \mu_e, \quad (6.17)$$

donde μ_n y μ_e son los potenciales químicos del neutrón y del electrón respectivamente, y la relación entre la energía de Fermi de cada barión y su potencial químico es

$$E_B^* = \mu_B - g_{\omega B}(n)\bar{\omega} - g_{\rho B}(n)I_{3B}\bar{\rho} - \Sigma_r. \quad (6.18)$$

El hecho de que el término Σ_r aparezca en la energía de Fermi, es lo que hace que el momento de Fermi de cada barión ahora dependa de la densidad bariónica local en cada punto del sistema, razón por la cual aparece la última ecuación en el sistema (6.8). Junto con la neutralidad de carga y la conservación del número bariónico, el sistema de seis ecuaciones no lineales que es necesario resolver para hallar los valores medios de los campos $\{\bar{\sigma}, \bar{\omega}, \bar{\rho}\}$, los momentos de Fermi $\{k_n, k_e\}$ y la energía de reacomodamiento Σ_r quedan escritos como

$$\sum_B g_{\sigma B}(n)n_B^S - m_\sigma^2 \bar{\sigma} = 0 \quad (6.19)$$

$$\sum_B g_{\omega B}(n)n_B - m_\omega^2 \bar{\omega} = 0 \quad (6.20)$$

$$\sum_B g_{\rho B}(n)I_{3B}n_B - m_\rho^2 \bar{\rho} = 0 \quad (6.21)$$

$$\sum_B \left(\frac{\partial g_{\omega B}}{\partial n} n_B \bar{\omega} + \frac{\partial g_{\rho B}}{\partial n} I_{3B} n_B \bar{\rho} - \frac{\partial g_{\sigma B}}{\partial n} n_B^S \bar{\sigma} \right) - \Sigma_r = 0 \quad (6.22)$$

$$\sum_B n_B - n = 0 \quad (6.23)$$

$$\sum_B n_B q_B + \sum_\lambda n_\lambda q_\lambda = 0. \quad (6.24)$$

Una vez resuelto este sistema de ecuaciones nos interesa calcular cantidades termo-

dinámicas. Para calcular la presión (o la densidad de energía) del sistema, primero se debe hallar el tensor de energía momento, para el cual partimos de la métrica $g_{\mu\nu}$ y del Lagrangiano

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\mathcal{L} + \sum_{\phi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_{\mu}(\partial\phi)} \right) \partial^{\nu}\phi, \quad (6.25)$$

con $\phi = \{\sigma, \omega, \rho\}$. Como el espacio tiempo en la escala de las interacciones en las NS es prácticamente plano ($\sim 1fm$), podemos aproximar la métrica por la de Minkowski $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Finalmente, para la presión, a temperatura cero tenemos que

$$\begin{aligned} P_{DDRMF} &= \frac{1}{3} \sum_i \langle T_{ii} \rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_B} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_B^{*2}(\bar{\sigma})}} + \frac{1}{3\pi^2} \sum_{\lambda} \int_0^{k_{\lambda}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_{\lambda}^2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} [m_{\sigma}^2 \bar{\sigma}^2 - m_{\omega}^2 \bar{\omega}^2 - m_{\rho}^2 \bar{\rho}^2] + n \Sigma_r. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Teniendo en cuenta que $P = -\Omega/V$, de esta cantidad, o mismo del tensor de energía impulso, es posible derivar todas las cantidades termodinámicas de interés, sin embargo, al igual que con los modelos de quarks, es necesario hacer la extensión del modelo a temperatura finita para estudiar los estadios de proto-ENs, por lo que las cantidades más relevantes serán escritas explícitamente en la sección 6.3. Es necesario recordar que, al igual que en el modelo de quarks, la ecuación de neutralidad de carga sirve para fijar el potencial químico del electrón y del muón. La inclusión de neutrinos y la ecuación de fracción leptónica resultan exactamente iguales a las ya mencionadas en la sección 2.2.

6.2. Modelos RMF(L) y parametrizaciones utilizadas

Hasta aquí hemos visto el desarrollo teórico del modelo hadrónico DDRMF, dependiente de la densidad. Sin embargo, es posible modificar ligeramente los modelos RMF no dependientes de la densidad para lograr resultados parecidos a aquellos en los que todas las constantes de acoplamiento dependen de la densidad.

Los modelos RMF en general se parametrizan de manera de reproducir ciertas propiedades de la materia hadrónica a densidad de saturación nuclear n_0 , como por ejemplo la energía de asimetría $J = E_{sym}(n_0)$. El problema con este enfoque es que no ajusta la pendiente de dicha energía (L_0) a densidad n_0 . Al ser L_0 una cantidad que fue siendo acotada con mayor precisión con el paso del tiempo [112] y que podría tener implicancias importantes en la composición de la materia de las ENs, es necesario introducir modificaciones

en este tipo de modelos. En particular, esto se puede lograr incluyendo varios términos de auto-interacción entre los mesones [113]. El problema con ese enfoque es que suaviza demasiado la EdE, lo cual no permite cumplir con los requerimientos de máxima masa de dos masas solares. En lugar de agregar más términos no lineales a los que ya tienen los modelos RMF, otro enfoque es utilizar la dependencia con la densidad únicamente en las interacciones isovectoriales, como puede verse en la ecuación (6.4), dejando igualadas a uno las f_i de la ecuación (6.3). Esto resulta conveniente, ya que se puede ajustar el coeficiente a_ρ de manera de obtener buenos resultados para L_0 , sin modificar otras propiedades de saturación ya existentes en la parametrización RMF [114]. Esta modificación en la parametrización de este tipo de modelos se conoce como RMF(L), y a diferencia con el tratamiento que hicimos anteriormente se deben agregar los términos de interacciones no lineales al Lagrangiano, de manera que

$$\mathcal{L}_{RMF(L)} = \mathcal{L}_{DDRMF} + \mathcal{L}_{NL\sigma} \quad (6.27)$$

$$\mathcal{L}_{NL\sigma} = -\frac{1}{3}\tilde{b}_\sigma m_N [g_{\sigma N}(n)\sigma]^3 - \frac{1}{4}\tilde{c}_\sigma [g_{\sigma N}(n)\sigma]^4. \quad (6.28)$$

En nuestro trabajo, utilizamos dos tipos de modelos, uno del tipo RMF(L) conocido como GM1(L)[115], y uno del tipo DDRMF cuya parametrización se conoce como DD2[107]. En ambos casos las constantes de acoplamiento mesón-hiperón se determinaron siguiendo la prescripción de la extensión de Nijmegen para núcleos blandos (ESC08)[116]. Las constantes de acoplamiento relativas mesón-hiperón isovectoriales se fijaron teniendo en cuenta propiedades concernientes al isoespín de los hiperones. Para las resonancias Δ se utilizó $x_{\sigma\Delta} = x_{\omega\Delta} = 1,1$ y $x_{\rho\Delta} = 1,0$, donde $x_{iH} = g_{iH}/g_{iN}$.

En la tabla 6.1 se listan las constantes de acoplamiento de los modelos utilizados en este trabajo. En la tabla 6.2 se muestran las propiedades de los modelos, las cuales son: la densidad de saturación nuclear n_0 , la energía por nucleón E_0 , la constante de incompresibilidad nuclear K_0 , la masa efectiva del nucleón m^*/m_N , la energía de asimetría J , la pendiente de la energía de asimetría L_0 y el potencial del nucleón U_N .

6.3. Extensión a temperatura finita

La extensión del modelo a temperatura finita se puede hacer de manera simple, teniendo en cuenta que estamos trabajando con fermiones. La diferencia entre los fermiones que tratamos en este modelo y los fermiones libres que regularizamos en el capítulo anterior, radica únicamente en que los del modelo hadrónico tienen un corrimiento en el potencial

Parámetros	GM1L	DD2
m_σ (GeV)	0.5500	0.5462
m_ω (GeV)	0.7830	0.7830
m_ρ (GeV)	0.7700	0.7630
$g_{\sigma N}$	9.5722	10.6870
$g_{\omega N}$	10.6180	13.3420
$g_{\rho N}$	8.9830	3.6269
b_σ	0.0029	0
\tilde{c}_σ	- 0.0011	0
a_σ	1	1.3576
b_σ	0	0.6344
c_σ	0	1.0054
d_σ	0	0.5758
a_ω	0	1.3697
b_ω	0	0.4965
c_ω	0	0.8177
d_ω	0	0.6384
a_ρ	0.3898	0.5189

Tabla 6.1: Parámetros de los modelos RMF(L) con la parametrización GM1L y DDRMF con la parametrización DD2 utilizados en este trabajo.

químico y la masa efectiva, es decir

$$\mu_B^* = \mu_B - g_{\omega B}(n)\bar{\omega} - g_{\rho B}(n)I_{3B}\bar{\rho} - \Sigma_r \quad (6.29)$$

$$m_B^* = m_B - g_{\sigma B}(n)\bar{\sigma}. \quad (6.30)$$

Vale notar, que lo que en el caso de temperatura cero era la energía de Fermi E_B^* , ahora pasa a ser el potencial químico modificado μ_B^* . Esto se entiende de manera directa ya que en el caso de temperatura cero el potencial químico es igual a la energía de Fermi, y en la extensión a temperatura finita esto no se mantiene. En este caso, la energía de cada barión sigue siendo $E_B^*(k) = \sqrt{k^2 + m_B^*(\bar{\sigma})}$ pero no tiene por qué ser igual al potencial químico. Luego de hacer estas distinciones, el tratamiento es el mismo que para fermiones libres: construir la función de partición, realizar las sumas de Matsubara, y regularizar de manera de eliminar el término divergente proveniente del vacío. Por simplicidad no repetiremos estos cálculos, ya que como dijimos son equivalentes a los de los fermiones libres. Luego, la presión queda escrita de la forma

Propiedades de saturación	GM1L	DD2
n_0 (fm ⁻³)	0.153	0.149
E_0 (MeV)	-16.30	-16.02
K_0 (MeV)	300.0	242.7
m^*/m_N	0.70	0.56
J (MeV)	32.5	32.8
L_0 (MeV)	55.0	55.3
$-U_N$ (MeV)	65.5	75.2

Tabla 6.2: Propiedades de la materia nuclear para las parametrizaciones GM1(L)[115] y DD2[107].

$$\begin{aligned}
P_{DDRMF}(T) &= \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{E_B^*(k)} [n_B^+ + n_B^-] + \frac{1}{3\pi^2} \sum_\lambda \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{E_\lambda(k)} [n_\lambda^+ + n_\lambda^-] \\
&- \frac{1}{2} [m_\sigma^2 \bar{\sigma}^2 - m_\omega^2 \bar{\omega}^2 - m_\rho^2 \bar{\rho}^2] + n \Sigma_r,
\end{aligned} \tag{6.31}$$

con la dependencia en la temperatura dada por los números de ocupación

$$n_B^\pm(k, T) = \left[1 + e^{\frac{E_B^*(k) \pm \mu_B^*}{T}} \right]^{-1} \tag{6.32}$$

$$n_\lambda^\pm(k, T) = \left[1 + e^{\frac{E_\lambda(k) \pm \mu_\lambda}{T}} \right]^{-1}, \tag{6.33}$$

con E_λ y μ_λ la energía y potencial químico de cada leptón respectivamente, donde ahora en lugar de los momentos de Fermi como incógnitas tendremos a los potenciales químicos de cada partícula. El resto de las cantidades termodinámicas, nuevamente, se pueden obtener tanto del tensor de energía impulso como de la presión. Por completitud, y porque será necesario más adelante trabajar con sistemas a entropía fija, calculamos la misma usando la relación termodinámica fundamental, obteniendo

$$\begin{aligned}
S(T) &= \frac{\partial P}{\partial T} = \\
&= \sum_B \gamma_B \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{E_B^*} \left[(n_B^+ - n_B^{+2}) \left(\frac{E_B^* + \mu_B^*}{T^2} \right) + (n_B^- - n_B^{-2}) \left(\frac{E_B^* - \mu_B^*}{T^2} \right) \right] \\
&+ \sum_\lambda \gamma_\lambda \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{E_\lambda} \left[(n_\lambda^+ - n_\lambda^{+2}) \left(\frac{E_\lambda + \mu_\lambda}{T^2} \right) + (n_\lambda^- - n_\lambda^{-2}) \left(\frac{E_\lambda - \mu_\lambda}{T^2} \right) \right],
\end{aligned} \tag{6.34}$$

siendo $\gamma_B = (2J_B + 1)/(6\pi^2)$ y $\gamma_\lambda = 1/(3\pi^2)$ los factores de degeneración respectivos. Las últimas dos cantidades termodinámicas necesarias para calcular la ecuación de estado las

obtenemos de la relación termodinámica fundamental, siendo entonces

$$\varepsilon = -P + TS + \sum_i \mu_i n_i \quad (6.35)$$

$$E_{G/B} = \frac{\varepsilon - TS + P}{n}, \quad (6.36)$$

donde el subíndice i recorre sobre todas las partículas (bariones y leptones). La densidad de energía ε es la densidad de energía total del sistema, y la $E_{G/B}$ es la energía de Gibbs por barión.

Finalmente, con la extensión a temperatura finita, estamos en condiciones de calcular las EdE hadrónicas tanto a temperatura finita como a entropía fijas. Es útil ver cómo se comporta el modelo hadrónico respecto a qué tipos de partículas empiezan a surgir a medida que la densidad aumenta. La Figura 6.1 muestra las poblaciones de partículas para las EdE utilizadas en este trabajo. Puede verse que la población de partículas depende fuertemente de la entropía por barión $s = S/n$ y la fracción leptónica Y_L . Particularmente para las resonancias Δ , el estado negativo de esta partícula es poblado primero, reemplazando algunos de los electrones de alta energía. Los otros tres estados (Δ^0 , Δ^+ , y Δ^{++}) son poblados a densidades que son apenas mayores que la densidad de saturación nuclear. Por lo tanto, de acuerdo a este modelo todos estos estados existen en los núcleos de las proto-EN. Por otro lado se puede ver la abundancia de electrones en la materia donde la fracción leptónica es distinta de cero, y los neutrinos están presentes (paneles superiores y medios de la Figura 6.1). Debido a esto, se podría especular que la conductividad eléctrica de este tipo de materia es considerablemente diferente de la conductividad eléctrica de la materia libre de neutrinos (paneles inferiores de la misma figura), donde la presencia de muones conlleva a una menor densidad de electrones en el sistema, y el aumento de la población de las partículas Δ^- , Ξ^- , and Σ^- causa una reducción del número de leptones. Respecto de la extrañeza contenida en los hiperones, su principal contribución viene de las partículas Λ y Ξ , cuya población crece monotónicamente con la densidad, dominando la composición de materia a densidades muy altas. Otras especies de hiperones están presentes, pero en menor grado.

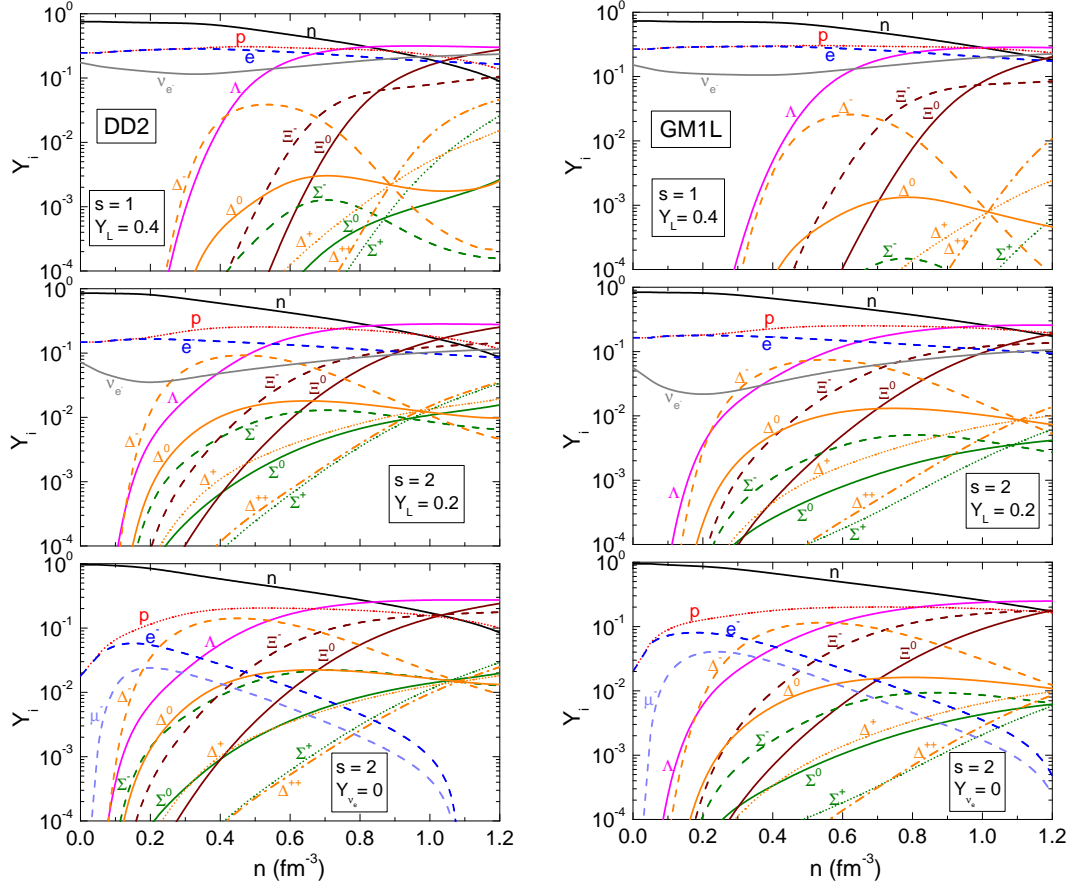


Figura 6.1: Izquierda: Población de partículas en función de la densidad para la parametrización DD2. Los valores de entropía y fracción leptónica elegidos son típicos del interior de proto-estrellas de neutrones. Derecha: lo mismo que el panel izquierdo pero para la parametrización GM1L.

Capítulo 7

Estrellas de neutrones con materia de quarks: resultados

Hasta aquí hemos desarrollado todos los componentes necesarios para modelar la materia en los núcleos internos de las ENs. Hemos descripto los modelos efectivos hadrónico y de quarks y hemos obtenido las EdE correspondientes. En el Capítulo 2, hemos presentado las ecuaciones de equilibrio hidrostático para las ENs que nos permiten, dada una EdE, obtener la masa, el radio y la masa bariónica de cada una de las estrellas que componen la familia de objetos compactos que corresponden a dicha EdE. Veamos entonces qué criterios utilizamos para construir las EdE híbridas. En principio, si existiera una transición de fase de materia hadrónica a materia de quarks en el interior de las ENs, la misma podría ser tanto abrupta (que se pueden describir usando el formalismo de Maxwell), como suave (que se pueden describir usando el formalismo de Gibbs), dependiendo de la tensión superficial en la interfase de quarks y hadrones. En este punto nos encontramos con un problema respecto de qué formalismo usar, ya que el valor de la tensión superficial es aún indeterminado. Los cálculos de *Lattice QCD* predicen un valor de tensión superficial $\sim 0 \text{ MeV/fm}^2$ - 100 MeV/fm^2 [117]. De acuerdo a estudios teóricos, una tensión superficial mayor a 70 MeV/fm^2 favorecería una transición de fase tipo Maxwell en lugar de una transición tipo Gibbs el valor de la tensión superficial en la interfase hadrones-quarks, es posible considerar los dos tipos de transición de fase en los núcleos internos de las EN y analizar si existe alguna consecuencia observacional que nos permita diferenciarlas. Asimismo, como nos interesa estimar una evolución térmica esquemática en este tipo de objetos, también necesitamos calcular las diferentes EdE isentrópicas correspondientes a los diferentes estadios de las estrellas que componen cada familia. En lo que sigue, mostraremos los resultados obtenidos al aplicar los modelos de materia de quarks y materia hadrónica descriptos en

capítulos anteriores al contexto de proto-ENs y ENs frías. Llamaremos estrellas híbridas a las ENs con materia de quarks en sus núcleos internos.

7.1. Estrellas híbridas con transiciones de fase abruptas

Para estudiar estrellas híbridas que posean una transición de fase abrupta en su interior, construiremos dichas transiciones según el formalismo de Maxwell para distintos valores de interacción vectorial en el modelo de quarks, considerando las parametrizaciones DD2 y GM1L del modelo hadrónico, partiendo de temperatura cero. Bajo la premisa de cumplir con la restricción observacional de $2 M_{\odot}$, correspondientes a los púlsares PSR J1614-2230 y PSR J0348+0432 [2, 118, 3, 119], y asumiendo la posibilidad de que la materia de quarks exista en el interior de las EN, se calcula la masa máxima de la familia de estrellas para distintos valores de interacción vectorial, ζ_v . Esto nos lleva a $0,331 < \zeta_v < 0,371$ para GM1L, y $0,328 < \zeta_v < 0,385$ para DD2. El límite inferior de ζ_v en cada caso, corresponde al valor mínimo de interacción vectorial, necesario para cumplir con la restricción de $2M_{\odot}$. El límite superior lo definimos al encontrar la interacción vectorial máxima para la cual existe materia de quarks dentro de la estrella. Es decir, valores de ζ_v mayores a 0.371 ó 0.385 para EdE híbridas construidas con las parametrizaciones GM1L o DD2 respectivamente, resultan en estrellas puramente hadrónicas. Una vez fijados los valores de la interacción vectorial para la materia de quarks a temperatura cero, se calculan distintas EdE a temperatura y/o entropía fijas y se analizan distintos estadíos isoentrópicos de las diferentes familias de estrellas. El mismo análisis se realiza también con el formalismo de Gibbs.

Para la construcción de la transición de fase, buscamos el punto donde se igualan las EdE hadrónicas y de quarks en el plano (p, E_G) , como explicamos en la sección 2.4. Los cruces para las curvas correspondientes a las interacciones vectoriales mencionadas se muestran en la Figura 7.1. En esa figura, se ve que hay dos transiciones visibles. La primera de materia de quarks a materia hadrónica a presión $P \sim 100 - 150 \text{ MeV/fm}^3$, y la segunda a de materia hadrónica a materia de quarks a $P \sim 350 - 400 \text{ MeV/fm}^3$. Tomamos como punto de transición física el segundo cruce mencionado, dado que el primero no es posible que ocurra. Las EdE son bastante similares y resulta difícil distinguir entre las dos fases en el rango de las presiones $P \sim 100 - 400 \text{ MeV/fm}^3$, por lo que para poder encontrar el punto de cruce se debe aumentar varias veces la precisión de los gráficos en esa zona. Por otro lado, puede verse en la Figura 7.2, que una transición de fase de primer orden ocurre a $\mu_B \sim 940 \text{ MeV}$, indicada por una discontinuidad en la densidad de partículas y las masas dinámicas. Esto corresponde a la región donde aún no se ha desconfinado el quark s , como

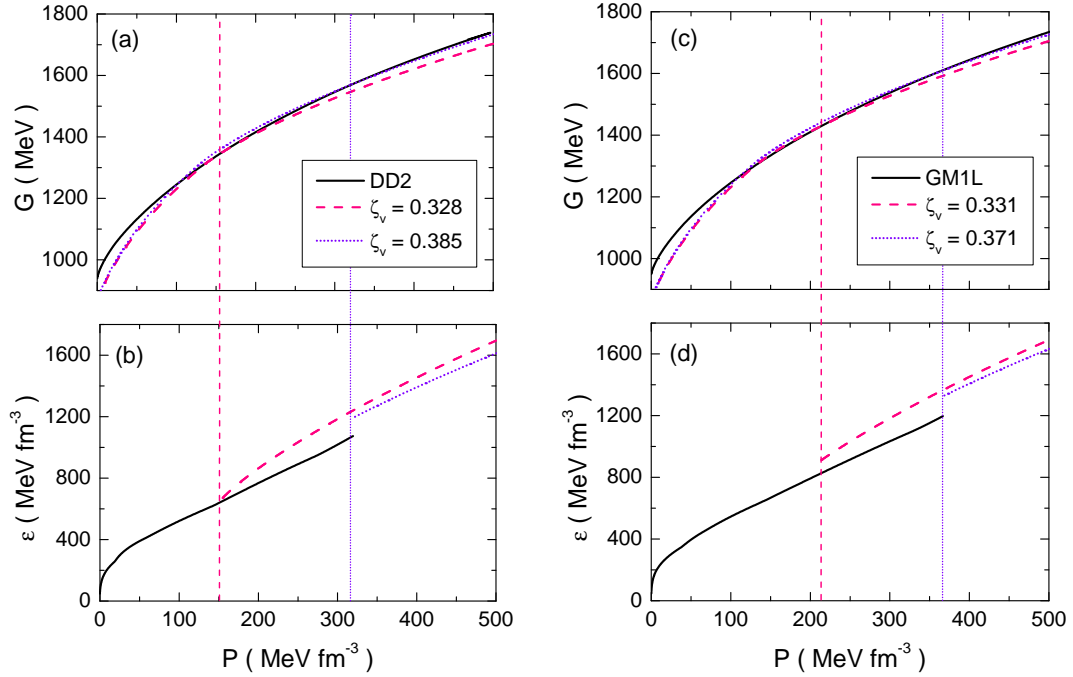


Figura 7.1: El panel (a) muestra la construcción de la EdE (a $T = 0$) de la energía de Gibbs por barión (G) para una parametrización híbrida DD2-PNJL-nl. La línea negra corresponde la EdE de la fase hadrónica y las líneas punteadas rojas y azules son las EdE para la fase de quarks para los dos valores de interacciones vectoriales. El panel (b) muestra la densidad de energía en función de la presión, para los valores mencionados. Los paneles (b) y (c) muestran lo mismo que los paneles (a) y (b) respectivamente, para la parametrización GM1L.

vimos en la sección 4.5. Por lo tanto, para potenciales químicos entre 940 MeV y 1300 MeV tenemos una fase donde el condensado quiral de los quarks u y d $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \sim 0$, mientras que $\langle \bar{s}s \rangle \neq 0$. Este comportamiento podría indicar la existencia de una fase que tiene aspectos tanto de materia nuclear como materia de quarks (ver [120, 121] y las referencias allí mencionadas), provocando un tipo de enmascaramiento entre las dos EdE [122] y podría explicar la primera transición de fase de quarks a hadrones, la cual resulta ser no física, debido a que la materia de quarks no está completamente desconfina. A potenciales mayores que $\mu_B \sim 1300$ MeV y presiones $P \sim 135$ MeV/fm³, el quark s se desconfina, y la EdE corresponde a materia pura de quarks libres, que es la parte que usaremos para construir la EdE híbrida.

Una vez que se construye la EdE híbrida, resolvemos las ecuaciones de TOV para encontrar las curvas masa-radio, y masa-densidad de energía de las familias de ENs correspondientes a dicha EdE. La curva de masa-densidad de energía tiene una función

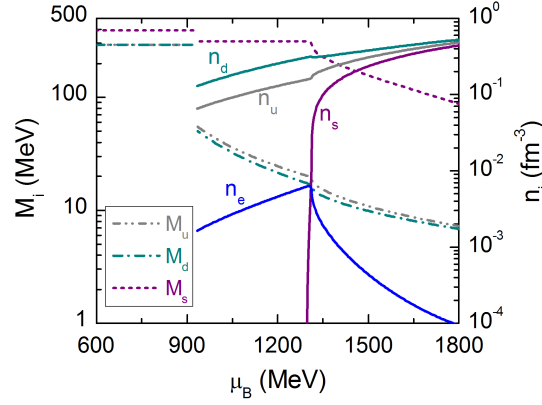


Figura 7.2: Masas dinámicas M_i y densidades n_i de los quarks u, d, s en función del potencial químico bariónico. n_e corresponde a la densidad de electrones.

importante en el análisis de estrellas híbridas: identificando en la EdE el valor de densidad de energía donde aparece la materia de quarks, es posible luego identificar en los resultados de masa-densidad de energía a partir de qué valores de masa las estrellas contienen materia de quarks. De la misma forma, en el caso de considerar superconductividad de color, es posible identificar a partir de dónde esta fase podría estar presente en las ENs obtenidas. Los resultados de este análisis para temperatura cero, para las parametrizaciones mencionadas, y sumando la construcción para la EdE híbridas a $T = 0$ se muestran en la Figura 7.3, mientras que en la Figura 7.4, además se incluyó la fase superconductora de color ($2SC + s$). En todos los análisis que siguen nos mantendremos en los valores correspondientes al límite inferior de las interacciones vectoriales calculadas, ya que dichos valores favorecen una mayor formación de materia de quarks en el interior de las estrellas híbridas.

Se puede ver que todas las curvas de las figuras 7.3 y 7.4 cumplen el requerimiento de llegar a las dos masas solares y también satisfacen la cota establecida para los radios de las ENs. Dicha cota, se establece a partir del análisis de datos proveniente de la fusión de dos ENs, el evento de ondas gravitacionales GW170817 [5]. También se puede apreciar que las familias de estrellas construidas con la parametrización hadrónica correspondiente a DD2 tienen una rama más extensa de estrellas híbridas que las construidas con la parametrización GM1L. Esto es así porque la EdE hadrónica DD2 es más dura, es decir, la materia es menos compresible, que la GM1L en términos de la energía libre de Gibbs, por lo que la transición a materia de quarks ocurre a densidades más bajas. También vemos que en el caso de la EdE con superconductividad de color, primero se da una transición a materia de quarks sin superconductividad, que luego transiciona a la fase superconductora. Esto

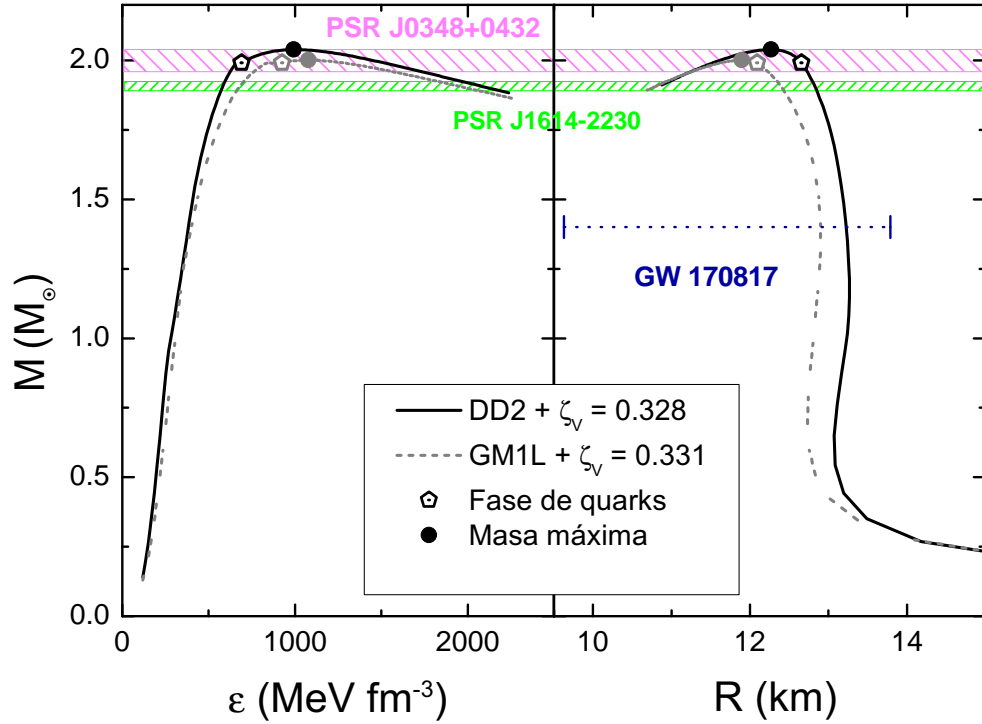


Figura 7.3: Curvas de masa gravitacional en función de energía y del radio estelar para las parametrizaciones a $T = 0$ sin superconductividad de color.

es así exclusivamente porque elegimos mantenernos con los valores de acoplamiento vectorial que son comparables a las construcciones sin considerar superconductividad. Como veremos más adelante, al variar dicho acoplamiento es posible construir una fase que pase de ser hadrónica pura, a superconductora. En la tabla 7.1 se ven los resultados para las masas máximas obtenidas en cada caso, donde se aprecia que el hecho de incluir superconductividad disminuye ligeramente la masa máxima obtenida. Por otro lado, es necesario mencionar que es posible encontrar otras parametrizaciones que cumplan requerimientos observacionales de dos masas solares. Como se ve en la Figura 7.5, por ejemplo, si se aumenta la interacción vectorial, se retrasa el inicio de aparición de un núcleo de quarks, pero si al mismo tiempo se aumenta la interacción de diquarks, es posible satisfacer la cota de dos masas solares y que la materia de quarks esté presente en el interior de la estrella a densidades mucho menores. Sin embargo, esto reduce ligeramente la masa máxima obtenida. En este trabajo, como mencionamos anteriormente, consideraremos el valor para la constante de acoplamiento más utilizado en la literatura, $\zeta_D = G_D/G_S = 0,75$ [29].

En las figuras 7.3, 7.4 y 7.5, hemos presentado los resultados para los casos de ENs frías. Para estudiar las proto-ENs, necesitamos extender las EdE a temperatura finita. Se sabe

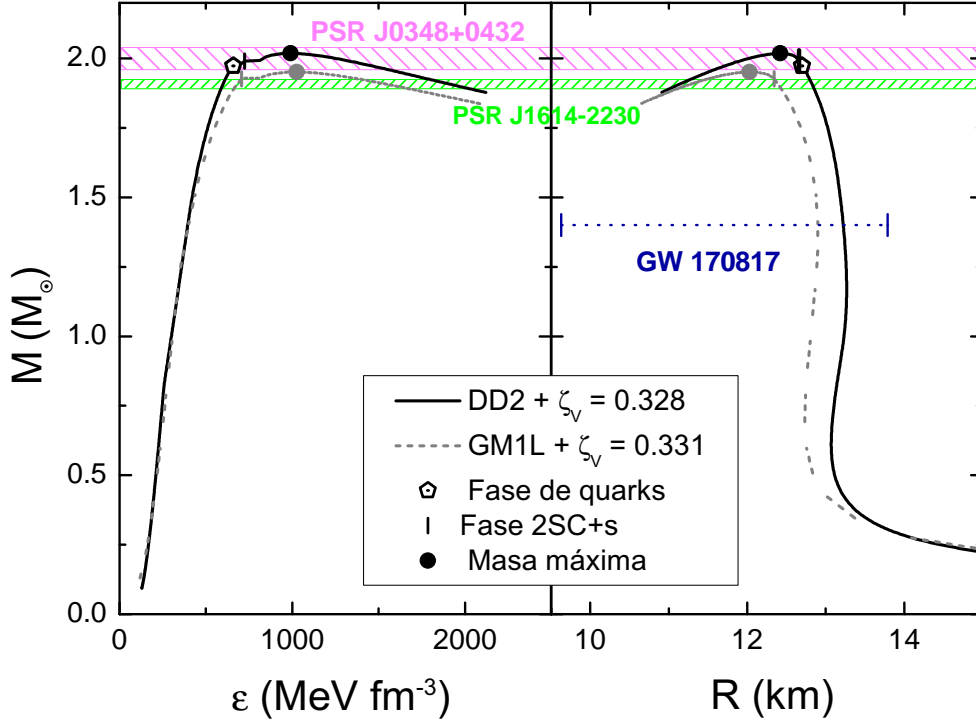


Figura 7.4: Curvas de masa gravitacional en función de energía y del radio estelar para las parametrizaciones a $T = 0$ con superconductividad de color. En el caso de la parametrización GM1L y $\zeta_V = 0,331$ la fase de quarks comienza en el mismo punto que la fase $2SC + s$.

GM1L			
	$M_G [M_\odot]$	$M_B [M_\odot]$	$\epsilon_c [\text{MeV}/\text{fm}^3]$
Hadrónicas puras	2,04	2,42	1194,82
$\zeta_v = 0,331$	2,00	2,36	1077,02
$(2SC + s)\zeta_v = 0,331$	1,95	2,30	1026,53
DD2			
	$M_G [M_\odot]$	$M_B [M_\odot]$	$\epsilon_c [\text{MeV}/\text{fm}^3]$
Hadrónicas puras	2,11	2,53	1110,68
$\zeta_v = 0,328$	2,04	2,43	992,88
$(2SC + s)\zeta_v = 0,328$	2,02	2,40	948,00

Tabla 7.1: Masa gravitacional M_G , masa bariónica M_B , y densidad de energía central ϵ_c para las estrellas de masa máxima obtenidas para las parametrizaciones a $T = 0$.

por trabajos anteriores que el escenario evolutivo de las proto-ENs se basa en un cálculo dinámico con EdE representativas (ver por ejemplo [123]). Con base en este análisis se infiere que las proto-ENs son aproximadamente isoentrópicas en distintas etapas de su

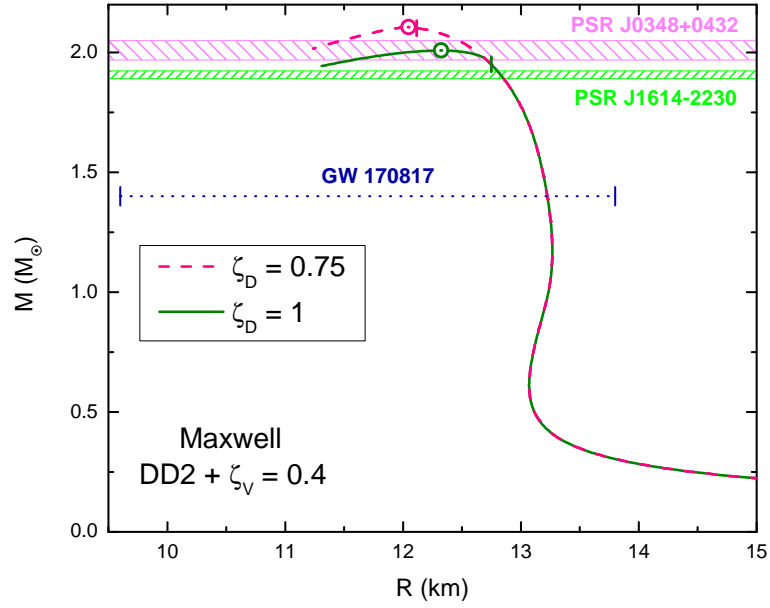


Figura 7.5: Masa gravitacional M_G , en función del radio para la parametrización DD2 y $\zeta_V = 0,4$, con distintos valores de acoplamiento de diquarks, las líneas verticales indican el comienzo de la fase $2SC + s$, que coincide con el inicio de la fase de quarks.

evolución, y en cambio la temperatura es variable a lo largo del radio de cada estrella. Para obtener una EdE isoentrópica para la construcción de Maxwell, primero calculamos las EdE para la fase hadrónica y de quarks, para una temperatura de transición fija (por ejemplo 15 MeV y 30 MeV). Luego de determinar el punto de cruce de las curvas, extendemos las curvas de cada fase isoentrópicamente para esa temperatura de transición. De esta manera, construimos EdE isoentrópicas, eligiendo temperaturas representativas de transición $T = 15$ MeV y $T = 30$ MeV. Dependiendo del estadio de evolución en el que suponemos que se encuentra la estrella, usamos distintas fracciones de leptones ($Y_{\nu_e} \neq 0$), considerando $Y_L = Y_e + Y_{\nu_e} = 0,2$ o $Y_L = 0,4$. Las relaciones de masa radio de las estrellas compuestas por ese tipo de materia se muestran en la Figura 7.6.

Para el modelo sin superconductividad y con lazo de Polyakov, los resultados obtenidos nos llevan al siguiente análisis. Para los valores máximos de interacciones vectoriales indicadas anteriormente ($\zeta_v = 0,371$ y $\zeta_v = 0,385$) encontramos que un incremento en la temperatura (con o sin la inclusión de neutrinos) evita la formación de materia de quarks en el interior de las estrellas. Las únicas estrellas con materia de quarks para esos valores

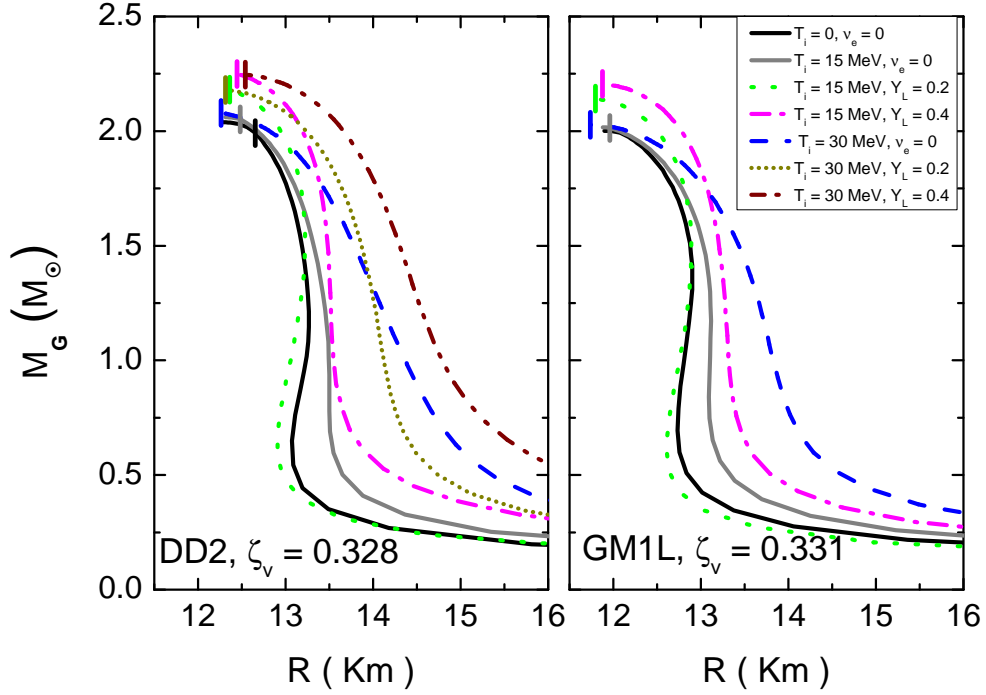


Figura 7.6: Masa gravitacional M_G , en función del radio para estrellas híbridas a diferentes temperaturas T_{trans} para la transición de fase de hadrones a quarks. Y_L es la fracción leptónica y Y_{ν_e} la fracción de neutrinos. Las líneas verticales marcan el inicio de la materia de quarks desconfiada. Con la excepción de las estrellas sin neutrinos ($Y_{\nu_e} = 0$), las de $T_{\text{trans}} = 0$ (T_0) and $T_{\text{trans}} = 15$ MeV (T_{15}), la transición ocurre en el pico de masa máxima.

de interacción vectorial, son las estrellas híbridas frías. Para el caso de las interacciones vectoriales mínimas, sucede cualitativamente lo mismo. Las diferencias provienen principalmente de considerar si existen neutrinos atrapados en su interior o no. Para la parametrización DD2, por ejemplo, se puede construir una EdE con neutrinos atrapados hasta temperaturas de transición $T_{\text{trans}} = 30$ MeV para modelar ENs que contengan materia de quarks en su interior. Sin embargo, para la parametrización GM1L, los neutrinos están presentes únicamente para configuraciones con temperaturas hasta $T_{\text{trans}} = 15$ MeV, y para temperaturas mayores la estrella se vuelve inestable antes de que la transición hadrones-quarks ocurra. En la Figura 7.6 se observa que la influencia de los neutrinos aumenta la masa máxima de la estrella. Esta influencia depende sensiblemente de la composición de la materia (ver [124] por ejemplo). Si se tienen en cuenta hadrones pesados (como hiperones o resonancias Δ) y quarks, la inclusión de neutrinos resulta en un incremento en la masa máxima. Esto es exactamente lo opuesto a la situación de las EdE idealizadas, donde solo se tienen en cuenta nucleones y leptones, y ningún otro componente que ablande la EdE,

en cuyo caso el efecto de los neutrinos es reducir la masa máxima, como se muestra en la referencia [122].

Hasta ahora calculamos las relaciones de masa radio para distintas EdE que corresponderían a distintos estadios de las ENs. Sin embargo, por más que exista materia de quarks en esos estadios, no quiere decir que sean realmente estadios previos de las estrellas calculadas a $T = 0$. Para determinar esto tenemos que analizar el diagrama masa gravitacional - masa bariónica. En la Figura 7.7 mostramos estas relaciones para los estadios calculados anteriormente. Asumiendo que estamos modelando estrellas aisladas (sin posibilidad de acretar materia), la masa bariónica debe ser una constante durante la evolución de la estrella, esta condición es mostrada con una línea vertical en la Figura mencionada. Las barras verticales marcan el inicio de la materia de quarks desconfiada en el núcleo de las estrellas. Las proto estrellas en sus etapas iniciales de evolución (por ejemplo, $s = 1$, $Y_L = 0,4$ y $s = 2, Y_L = 0,2$) resultan ser estrellas puramente hadrónicas sin importar cuán masivas sean. Una vez que se deleptonizan ($Y_{\nu_e} = 0$), y sus entropías disminuyen a valores de $s = 1,5$ y $s = 0,8$, hay presencia de materia de quarks pura. Sin embargo, esto sucede en nuestros ejemplos solo para las estrellas que se encuentran en las regiones gravitacionalmente inestables para la estrella de temperatura cero, donde las proto-ENs tienen masas bariónicas mayores que la correspondiente masa de la estrella fría. Esto quiere decir que si bien es posible que contengan materia de quarks en su formación, colapsarían eventualmente a un agujero negro. La situación cambia únicamente cuando las estrellas se convierten en estrellas frías ($s = 0$, $Y_{\nu_e} = 0$), las cuales contienen materia de quarks pura en sus núcleos. En las tablas 7.2 y 7.3 mostramos las proto-estrellas según van evolucionando hacia la estrella de masa máxima fría asociada.

GM1L y $\zeta_v = 0,331$			
Estadios	$M_G [M_\odot]$	R [km]	Composición del núcleo
$s = 1,0$, $Y_L = 0,4$	2,05	12,75	Hadrónica pura
$s = 2,0$, $Y_L = 0,2$	2,04	12,84	Hadrónica pura
$s = 1,5$, $Y_{\nu_e} = 0$	2,02	11,94	Hadrónica pura
$s = 0,8$, $Y_{\nu_e} = 0$	2,01	11,97	Hadrónica pura
$s = 0,0$, $Y_{\nu_e} = 0$	2,00	11,90	Híbrida

Tabla 7.2: Masa, radio y composición del núcleo para las (proto-) ENs con masa bariónica conservada $M_B = 2,36M_\odot$ para la parametrización GM1L.

Se ha propuesto [124, 125] que las proto-estrellas inestables descritas anteriormente colapsarían en agujeros negros. Mas aún, se mostró en los trabajos de las referencias [124, 126] que el colapso podría estar relacionado a la presencia de hiperones y resonancias

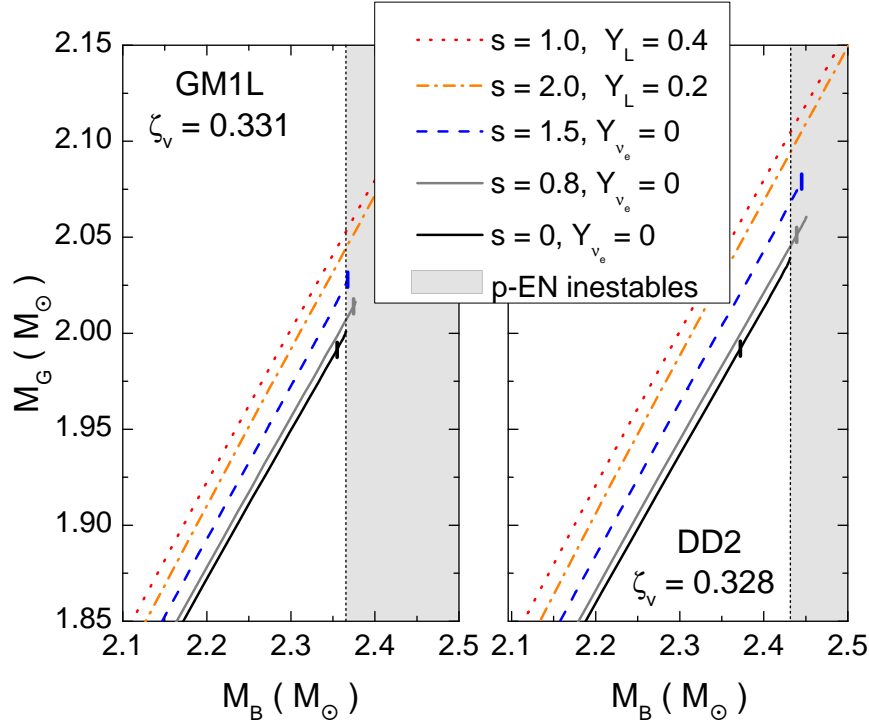


Figura 7.7: Masa gravitacional versus masa bariónica para los estadios seleccionados en la evolución de las proto-ENs. Cada línea termina en la estrella de masa máxima de cada estadio. Las líneas verticales indican el inicio de la materia de quarks desconfiada. Las estrellas en la región sombreada son gravitacionalmente inestables.

DD2 y $\zeta_v = 0,328$			
Estadios	$M_G [M_\odot]$	R [km]	Composición del núcleo
$s = 1,0, Y_L = 0,4$	2,10	13,09	Hadrónica pura
$s = 2,0, Y_L = 0,2$	2,09	13,15	Hadrónica pura
$s = 1,5, Y_{\nu_e} = 0$	2,07	12,37	Hadrónica pura
$s = 0,8, Y_{\nu_e} = 0$	2,05	12,49	Hadrónica pura
$s = 0,0, Y_{\nu_e} = 0$	2,04	12,27	Híbrida

Tabla 7.3: Masa, radio y composición del núcleo para las (proto-) ENs con masa bariónica conservada $M_B = 2,43M_\odot$ para la parametrización DD2.

Δ , y/o materia de quarks, dado que a temperatura finita y con estas composiciones, es posible alcanzar rangos de masa mayores (sin desestabilizar la estrella), que a temperatura cero y sin neutrinos atrapados.

Los resultados con superconductividad a temperatura finita resultan muy distintos a los ya mostrados. Por un lado, es imposible mantener las mismas interacciones vectoriales

con las que estábamos trabajando y conseguir EdE híbridas. El efecto de la temperatura, en lugar de mover el inicio de la materia de quarks a densidades más altas (como ocurría en el modelo PNJL-nl), hace que la transición ocurra a densidades tan bajas que resultan no-físicas. Es necesario entonces modificar los valores para la constante de acoplamiento de la interacción vectorial, con el motivo de ver qué resultados se obtienen en las curvas de masa radio. Para esto, es posible elegir (por ejemplo) un acoplamiento tal que exista materia de quarks a temperaturas altas y medias, y que a la vez mantenga la presencia de quarks a bajas temperaturas. A modo de ejemplo se muestran en la Figura 7.8 estas curvas para un acoplamiento vectorial $\zeta_V = 0,39$.

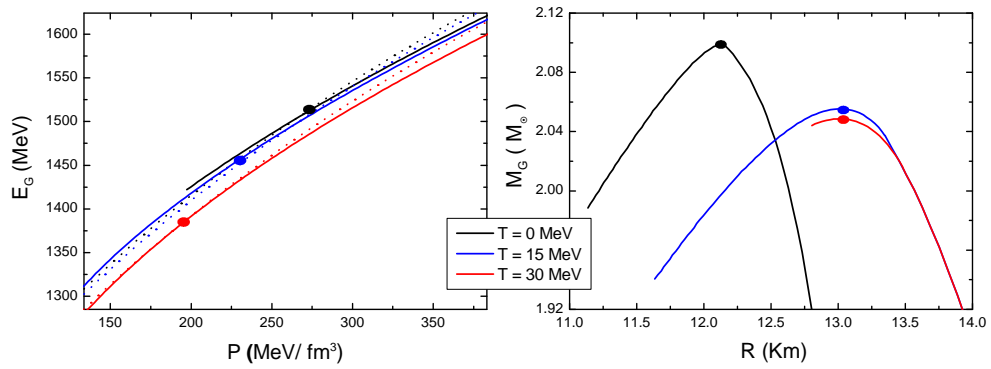


Figura 7.8: Izquierda: construcción de EdE híbridas para el modelo de superconductividad a distintas temperaturas. Las líneas punteadas corresponden a las EdE hadrónicas de parametrización DD2 y las llenas indican las EdE de quarks con $\zeta_V = 0,39$ y $\zeta_D = 0,75$. Los puntos llenos indican dónde termina la fase hadrónica y comienza la fase de quarks. Derecha: relación masa radio para el mismo modelo, los puntos llenos indican estrella de masa máxima.

Como se puede ver, los resultados son completamente opuestos a los del modelo que incluye al lazo de Polyakov. En el modelo $2SC + s$, por un lado, el efecto que produce la temperatura es mover la transición hadrones-quarks a potenciales químicos más bajos. Por otro lado, a medida que se incrementa la temperatura, las masas máximas de las estrellas disminuyen en lugar de aumentar. Esto también a su vez da como resultado masas bariónicas menores, por lo que resulta imposible cumplir la conservación de masa bariónica para el caso de las estrella fría de masa máxima. Por otro lado, el acoplamiento vectorial elegido en la Figura 7.8 es tal que la transición de fase ocurre directamente de materia hadrónica a materia superconductora de color. Sin embargo, la elección de otros acoplamientos que permiten una transición de materia hadrónica a materia normal de quarks, para luego transicionar a materia $2SC + s$, presentan el mismo comportamiento. Es decir, el efecto de la temperatura mueve la transición a densidades más bajas, pero las masas de las estrellas obtenidas a medida que se incrementa la temperatura resultan

menores. En el capítulo 8 explicaremos dos observaciones que resultan importantes sobre estos comportamientos.

7.2. Estrellas híbridas con transiciones de fase mixta

Para analizar la posibilidad de que exista una fase mixta en las estrellas, el tratamiento es el mismo que el explicado en la sección 2.4. En la construcción de Gibbs, la transición de fase es más suave que en la construcción de Maxwell, y requiere neutralidad de carga eléctrica global en lugar de local, por lo que las fases hadrónica y de quark poseen carga eléctrica no nula por separado y tienen potenciales químicos continuos a lo largo de la transición. La diferencia a nivel de cálculo con la construcción a lo Maxwell, radica en que no es posible construir la fase mixta por simple inspección de dónde se cruzan las curvas, si no que hay que crear un código numérico que contenga ambos modelos (de quarks y hadrones) y que resuelva ambas EdE para cada punto de manera que se cumplan el conjunto de ecuaciones (2.18)-(2.22). Esto tiene, por un lado la desventaja de que es muy costoso computacionalmente, pero por otro lado la ventaja de que no hay que hacer construcciones isotérmicas primero e isoentrópicas después. Al tener un único código que resuelva todas las ecuaciones a la vez, se puede pedir la condición de que la temperatura sea una variable, y que sea igual punto a punto, de tal manera de obtener una entropía por barión constante.

Dado que en la fase mixta conviven especies de partículas hadrónicas y de quarks al mismo tiempo, resulta interesante estudiar qué sucede con las poblaciones de cada una. En la Figura 7.9 se muestran las poblaciones para las dos parametrizaciones utilizadas. Como la fase mixta empieza en la densidad en la que el quark s se desconfina, es notorio el efecto que eso produce en el resto de las densidades. Para el caso de la parametrización GM1L, se observa que cuando comienza la fase mixta, los hadrones que tienen carga negativa tienen un salto negativo en su población, mientras que el neutrón tiene un salto positivo, y el hiperón Λ un salto negativo, pero ambos de menor magnitud que los saltos de las partículas cargadas. Esto se debe a un efecto combinado producto del desacople del quark s al comienzo de la fase mixta y la dependencia de las constantes de acoplamiento con la densidad. Notar que, por ejemplo, este efecto de "quiebre" en las poblaciones de partículas es mas notorio en el caso de la parametrización GM1L, panel derecho de la Figura 7.9 en la que solo las constantes de acoplamiento relacionadas con el meson ρ dependen con la densidad. Para la parametrización DD2, panel izquierdo de la Figura 7.9, este efecto de 'quiebre' es menos visible, debido a que todas las constantes de acoplamiento son dependientes de la densidad.

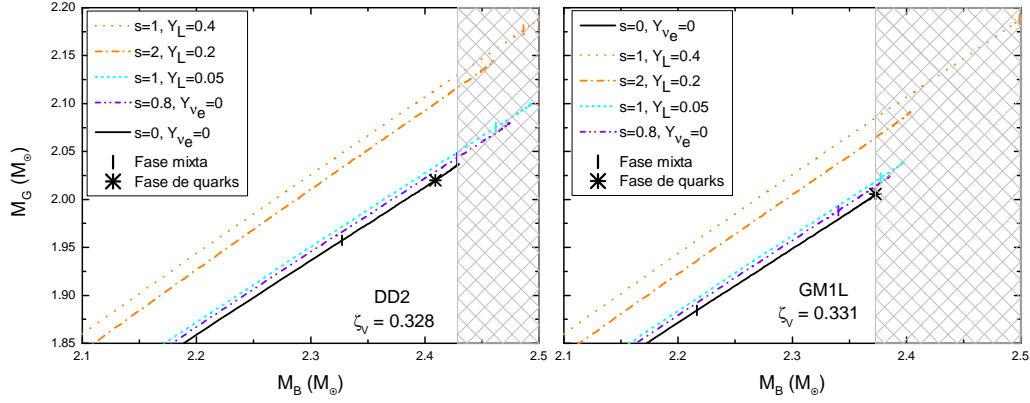


Figura 7.10: Izquierda: Masa gravitacional en función de la masa bariónica para la parametrización DD2 en la construcción de fase mixta, la parte sombreada corresponde a estrellas gravitacionalmente inestables. Las líneas verticales indican el comienzo de la fase mixta, y el asterisco indica el comienzo de la fase pura de quarks. Derecha: las mismas curvas que en el panel izquierdo pero con la parametrización GM1L.

de la referencia [44] donde el estadio de máximo calentamiento de la estrella corresponde a ($s = 2$, $Y_{\nu_e} = 0$), hay que incluir fenómenos de transporte, o bien el cálculo correspondiente a dicho trabajo fue hecho con EdE menos realistas, y el rol de los neutrinos con nuestras EdE es significativamente distinto como para llegar a máximo calentamiento antes de que los neutrinos se escapen de la estrella.

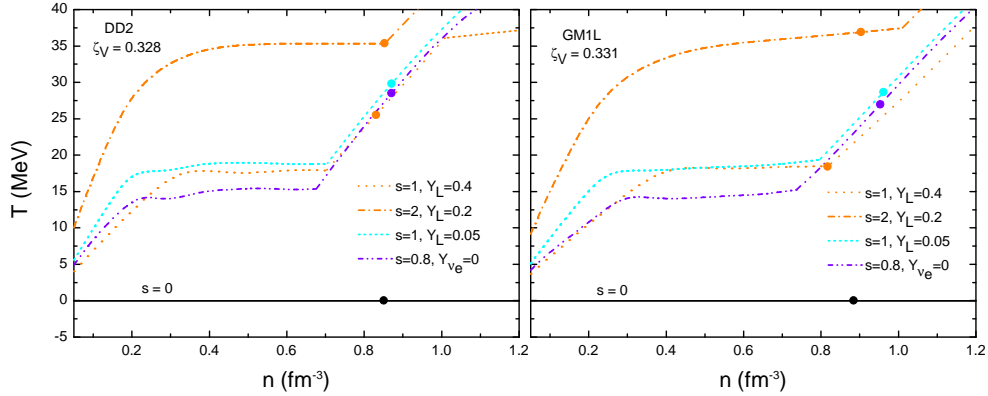


Figura 7.11: Izquierda: Temperatura en función de la densidad bariónica para las distintas EdE analizadas, para la parametrización DD2. Los puntos llenos marcan la densidad correspondiente a la densidad central de la estrella de masa máxima para cada curva. Izquierda: lo mismo que el panel derecho pero para la parametrización GM1L.

Finalmente, para terminar el análisis de la fase mixta, nos resta ver cuál es el efecto de la fase $2SC + s$ en las estrellas frías. Como era de esperar, la inclusión de este efecto

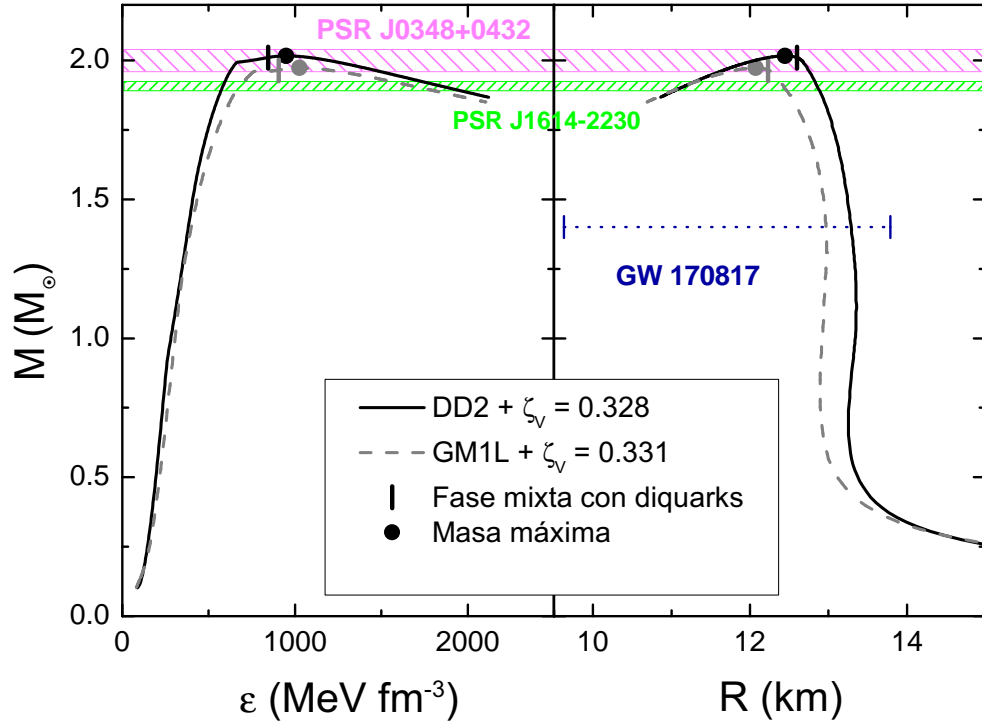


Figura 7.12: Perfiles de densidad de energía-masa y masa-radio para las estrellas híbridas con superconductividad de color.

disminuye la masa máxima de la familia de estrellas obtenida, ya que la inclusión de la superconductividad de color hace que la materia sea más compresible, al punto que para la parametrización GM1L no se alcanza la condición de las dos masas solares, como se puede ver en la Figura 7.12. Por otro lado, aunque usando la parametrización DD2 se llega a las dos masas solares, la masa bariónica obtenida disminuye sensiblemente respecto del caso sin superconductividad de color. Como se puede ver en la Figura 7.13, la inclusión de la fase $2SC + s$ nos lleva a una estrella fría que no tiene estadios anteriores de estrellas que contengan ni materia de quarks pura ni una fase mixta compuesta por materia hadrónica y materia de quarks. El mismo comportamiento se observa para la parametrización DD2 como la GM1L. Los resultados para las masas, radio y composición del núcleo de las estrellas que conservan masa bariónica en la construcción de fase mixta, se muestran en las tablas 7.4 y 7.5 para las parametrizaciones DD2 y GM1L respectivamente.

DD2 y $\zeta_v = 0,328$			
Estadíos	$M_G [M_\odot]$	R [km]	Composición del núcleo
$s = 1,0, Y_L = 0,4$	2,13	11,88	Hadrónica pura
$s = 2,0, Y_L = 0,2$	2,12	11,96	Hadrónica pura
$s = 1, Y_L = 0,05$	2,05	11,61	Hadrónica pura
$s = 0,8, Y_{\nu_e} = 0$	2,04	11,60	Hadrónica pura
$s = 0,0, Y_{\nu_e} = 0$	2,01	12,52	Híbrida con NQM
$s = 0,0, Y_{\nu_e} = 0$	2,00	11,56	Híbrida con $2SC + s$

Tabla 7.4: Masa, radio y composición del núcleo para las (proto-) ENs con masa bariónica conservada $M_B = 2,42M_\odot$ para la parametrización DD2 y fase mixta de hadrones y quarks.

GM1L y $\zeta_v = 0,331$			
Estadíos	$M_G [M_\odot]$	R [km]	Composición del núcleo
$s = 1,0, Y_L = 0,4$	2,08	13,10	Hadrónica pura
$s = 2,0, Y_L = 0,2$	2,06	12,51	Hadrónica pura
$s = 1, Y_L = 0,05$	2,02	12,01	Hadrónica pura
$s = 0,8, Y_{\nu_e} = 0$	2,01	11,95	Híbrida
$s = 0,0, Y_{\nu_e} = 0$	2,00	11,85	Híbrida con NQM
$s = 0,0, Y_{\nu_e} = 0$	1,97	12,07	Híbrida con $2SC + s$

Tabla 7.5: Masa, radio y composición del núcleo para las (proto-) ENs con masa bariónica conservada $M_B = 2,36M_\odot$ para la parametrización GM1L y fase mixta de hadrones y quarks.

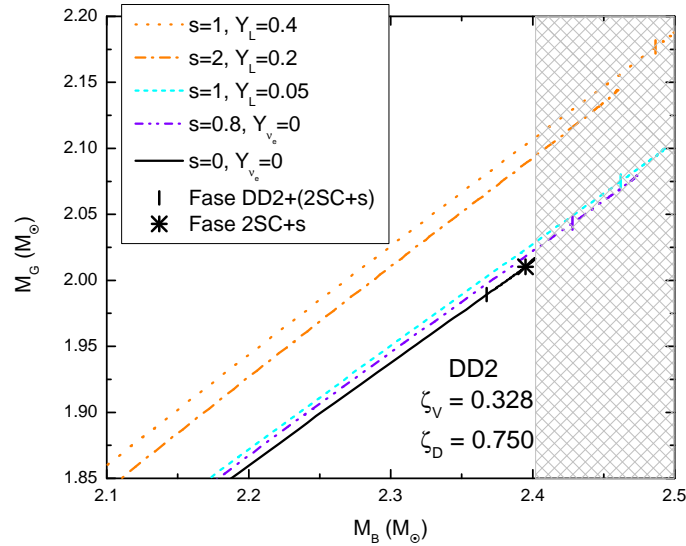


Figura 7.13: Masa gravitacional versus masa bariónica para los estadíos seleccionados en la evolución de las proto-ENs, con la estrella fría correspondiente a la EdE con parametrización DD2 y fase 2SC+s.

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo hemos aplicado modelos de quarks no locales para describir la materia en el interior de ENs. Se calcularon familias de proto-estrellas y estrellas híbridas frías considerando dos formalismos diferentes para el estudio de la transición de fase de la materia hadrónica, ubicada en el núcleo externo de la estrella, a la materia de quarks, ubicada en el núcleo interno ya sea como fase única o siendo parte de una fase mixta. A partir de las ecuaciones TOV de equilibrio hidrostático que nos permiten calcular la estructura de ENs con simetría esférica y no rotantes y utilizando las EdE híbridas obtenidas, se construyeron diferentes familias de objetos compactos y se obtuvieron diagramas de masa gravitacional-radio, masa gravitacional- masa bariónica, y masa gravitacional- densidad de energía. Analizando los distintos estadios de evolución térmica por los que pasaría una EN desde su estado de proto-estrella hasta que se enfría, impusimos diferentes restricciones a nuestras EdE teniendo en cuenta la cota observacional de $2 M_{\odot}$ impuesta por los púlsares J0348+0432 y J1614-2230. Asimismo, se tuvieron en cuenta las nuevas restricciones impuestas sobre los radios de estos objetos. Las mismas, provienen del análisis de datos del evento histórico conocido como GW170817: la primera detección de ondas gravitacionales proveniente de la fusión de dos ENs. Para la construcción de las EdE híbridas que sirven para determinar las diferentes familias de estrellas, describimos el marco teórico de dos tipos de transiciones: tipo Maxwell o abrupta y sin formación de fase mixta o tipo Gibbs, en la cual se produce formación de fase mixta en la que coexisten componentes de ambas fases y cuya presión varía monótonamente con las densidad.

Para la fase de quarks, describimos completamente el modelo no local Nambu Jona-Lasinio en $SU(3)$, con interacción vectorial e incorporación de lazo de Polyakov para modelar la materia a temperatura cero y a temperatura finita. Del mismo modo se describió el modelo, en este caso sin lazo de Polyakov pero incluyendo superconductividad de

color en los dos mismos regímenes de temperatura. Este último modelo fue desarrollado permitiendo la formación de diquarks únicamente entre los quarks u y d , y formando una fase $2SC + s$, es decir con presencia de quark s ya sea como partícula libre, o en condensado quiral. Obtuvimos que distintas elecciones de interacción vectorial y de acoplamiento de diquarks retrasan o adelantan el desconfinamiento del quark s , llevando así a distintos tipos de transiciones de fase (primer orden o crossover) para la restauración de la simetría quiral de dicho quark. Para la descripción de la materia hadrónica, nos basamos en el modelo de campo medio relativista no lineal con constantes de acoplamiento dependientes de la densidad. Dentro del marco de ese modelo, elegimos las parametrizaciones denominadas DD2 y GM1L por ser algunas de las que se ajustan a las cotas establecidas en experimentos correspondientes a la física hadrónica. Usando DD2 y GM1L, hemos calculado la población de partículas puramente hadrónica en proto-ENs para entropías y fracciones leptónicas típicas de ese tipo de materia en dicho contexto. De acuerdo al modelo hadrónico utilizado en esta tesis, los resultados muestran que los hiperones surgen a densidades del orden de la densidad de saturación nuclear. Además, la población de los hiperones con extrañeza aumenta con la densidad, por lo que en una transición de fase de materia hadrónica a materia de quarks, el rol del quark s no puede ser descartado. Ambas parametrizaciones hadrónicas fueron usadas con las EdEs de la materia de quarks teniendo en cuenta las densidades en las que los quarks están desconfinados y fuera de la zona meta-estable determinada por las espinodales en el diagrama de fases del modelo.

Para la construcción de EdEs híbridas comenzamos considerando una transición de fase hadrón-quark abrupta, usando el formalismo de Maxwell, restringiéndonos a los valores de interacción vectorial para la materia de quarks que nos permitieron llegar a $2 M_{\odot}$. Además, para cada uno de los casos analizados, elegimos el mínimo acoplamiento vectorial que nos permitiera lograr una transición de fase de materia hadrónica a materia de quarks desconfinada a presiones más bajas, de manera de favorecer la presencia de esta última en el interior de las EN. Esto nos llevó a obtener los valores de interacción vectorial en los rangos $0,331 < \zeta_v < 0,371$ para GM1L, y $0,328 < \zeta_v < 0,385$ para DD2. Una vez obtenidas las diferentes familias de estrellas y establecida la condición de las masas máximas de dichas familias para cada parametrización, calculamos la masa bariónica correspondiente en cada caso, para describir una evolución térmica esquemática. Suponiendo EN aisladas, utilizamos el diagrama masa gravitacional-masa bariónica para determinar posibles estadios de estrellas calientes que puedan evolucionar al correspondiente a la estrella fría, conservando su masa bariónica. Bajo esta condición, para el modelo con lazo de Polyakov obtuvimos que para transiciones de fase tipo Maxwell, no existen estadios previos a la EN de masa máxima que contengan materia de quarks libre: estrellas con núcleos de

quarks sólo son posibles para las configuraciones de estrellas con entropía nula. Es decir, el efecto de la temperatura mueve la transición de fase a potenciales químicos muy altos, impidiendo que existan configuraciones de estrellas estables con materia de quarks desconfiada en su interior. Por otro lado, al incluir superconductividad de color (fase $2SC + s$) en el modelo de quarks, encontramos que el efecto de aumentar la temperatura mueve la transición de fase a potenciales químicos más bajos, permitiendo así que la materia de quarks aparezca mucho antes en la EdE híbrida. Lamentablemente este efecto en lugar de incrementar la masa máxima en las estrellas, la disminuye, por lo cual los estadíos previos de proto-ENs con diquarks, no conservan la masa bariónica necesaria para evolucionar a la estrella fría de masa máxima, colapsando a un agujero negro. Analizando más en detalle este comportamiento, pudimos detectar que este efecto no es consecuencia de incluir la superconductividad de color en el modelo, si no más bien ocurre por no incluir el lazo de Polyakov, independientemente de considerar o no una fase superconductora.

Para la construcción de transiciones de fase en los que se considera el formalismo de Gibbs, permitiendo así la posibilidad de una fase mixta, obtuvimos que para el caso de la parametrización GM1L y acoplamiento vectorial mínimo ($\zeta_V = 0,331$), es posible encontrar un estadio evolutivo anterior para la estrella fría de masa máxima, con entropía por barión $s = 0,8$ y sin neutrinos atrapados, que se corresponde con una estrella con núcleo de fase mixta compuesta por quarks y hadrones. La temperatura obtenida en el centro de la estrella para este estadio es $T_{central}^{GM1L} = 28$ MeV. La composición interna de la estrella fría de masa máxima producto de la evolución de dicho estadio consiste en una fase mixta de quarks y hadrones, y una fase de quarks desconfiados puros en el núcleo interno de la estrella. Para los casos en los que se tuvo en cuenta la fase $2SC + s$, obtuvimos que el hecho de incluir esta fase para la descripción de la materia de quarks en las ENs disminuye la masa máxima de las estrellas calculadas, tanto para la construcción de Maxwell, como para la construcción de Gibbs. Además, en la construcción de Gibbs, la combinación de la parametrización GM1L con materia $2SC + s$ no satisface la cota observacional de $2 M_\odot$. Sin embargo, esta misma parametrización combinada con quarks sin considerar la fase superconductora de color fue la única que dio como resultado una estrella en un estadio de entropía no nula con materia de quarks en su interior, como antecesora de las estrella híbrida fría de masa máxima.

Finalmente, tanto en las construcciones de fase abrupta o mixta, incluyendo o no el lazo de Polyakov y la superconductividad de color, las estrellas híbridas obtenidas a temperatura cero nunca superaron la masa máxima que se obtuvo de considerar materia hadrónica pura únicamente. Estos resultados eran esperables ya que la inclusión del quark s suaviza la EdE de la materia de quarks, y disminuye la masa máxima de la familia de estrellas

calculada. Sin embargo, hasta el momento no existían trabajos en modelos no locales que tuvieran en cuenta una fase superconductora de color conservando el término de mezcla (interacción de 6 puntos de 't Hooft) poniendo de manifiesto que la inclusión de dicha interacción no endurece suficientemente la EdE. Por ello, es posible que modelos que incluyan los tres tipos de diquarks, como en el caso de la fase *CFL* (*Color Flavor Locked*), den como resultado EdE más duras que en el caso del modelo $2SC + s$. Sin embargo, como vimos, si no se considera el efecto del lazo de Polyakov del modelo, un aumento en la temperatura mueve la transición de fase hadrón-quark a densidades menores. Por esto, sería interesante considerar la posibilidad de incorporar nuevas mejoras al modelo de quarks considerado, por ejemplo, revisando el rol del lazo de Polyakov y estudiando la posibilidad de considerar una constante de acoplamiento dependiente de la temperatura. Además, si bien en esta tesis hemos desarrollado la fase $2SC + s$, para el estudio de la física de objetos compactos, sería también interesante investigar el efecto de una fase *CFL*. El problema de incluir ambas contribuciones (lazo de Polyakov y superconductividad de color) simultáneamente en el modelo debido a la rotación en el espacio de color, aún queda sin resolver. Para salvar este punto, en la extensión del modelo a T finita incluyendo la fase superconductora de color, la temperatura se introduce únicamente mediante las frecuencias de Matsubara y sin considerar el potencial de Polyakov. Asimismo, sería interesante el estudio del diagrama de fases considerando la fase $2SC + s$. La inclusión de diquarks en el modelo, seguramente afectaría la estructura del diagrama de fases con la posible ocurrencia de nuevas regiones dependiendo de la intensidad de la interacción de diquarks.

Respecto a las configuraciones de estrellas híbridas calculadas en este trabajo, los resultados muestran que, si existiera una transición de fase en el interior de estos objetos, las ENs de $2 M_{\odot}$ podrían contener un núcleo interno formado por quarks puros o en una fase superconductor de color, o bien un núcleo interno formado por una fase mixta de hadrones y quarks con o sin superconductividad de color. Como dijimos al comienzo, la EdE de la materia densa aún es incierta. NICER, Strobe-X, y los datos proporcionados por los detectores de ondas gravitacionales como LIGO y Virgo tienen el potencial no solo de ayudar a dilucidar que tipo de materia compone el interior de las ENs, sino también de lograr una mejor comprensión de la estructura y estabilidad de este tipo de objetos, así como también del comportamiento de la materia densa sometida a condiciones extremas.

Apéndice A

Integrales fermiónicas para el modelo NJL

Queremos ver cómo hacer para calcular las integrales sobre los campos fermiónicos de la ecuación (3.19). Para eso es conveniente escribir las corrientes en términos del regulador transformado en Fourier de la ecuación (3.13), con lo que nos queda

$$j_a^s(x) = \int d^4z \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g(p) \bar{\psi}\left(x + \frac{z}{2}\right) \lambda_a \psi\left(x - \frac{z}{2}\right) e^{-izp}, \quad (\text{A.1})$$

luego, uno de los términos que aparecían en la integral fermiónica queda escrito como

$$\int d^4x \sigma_a(x) j_a^s(x) = \int d^4x d^4z \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g(p) \sigma_a(x) \psi\left(x + \frac{z}{2}\right) e^{-izp}. \quad (\text{A.2})$$

Ahora conviene escribir tanto las transformadas de los campos fermiónicos como bosónicos

$$\bar{\psi}\left(x - \frac{z}{2}\right) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(q) e^{iq(x + \frac{z}{2})} \quad (\text{A.3})$$

$$\psi\left(x + \frac{z}{2}\right) = \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \psi(t) e^{-it(x - \frac{z}{2})} \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_a(x) = \int \frac{d^4s}{(2\pi)^4} \sigma_a(s) e^{-is(x)}, \quad (\text{A.5})$$

donde omitimos explícitamente los símbolos distintos para las funciones transformadas para aliviar la notación, debido a que en la siguiente ecuación aparecerán solo las transformadas en el espacio de momentos. Utilizando (A.3), (A.4) y (A.5) en (A.2) y agrupando

convenientemente los exponentes, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sigma_a(x) j_a^s(x) &= \int \frac{d^4x d^4z d^4p d^4q d^4s d^4t}{(2\pi)^{16}} g(p) \bar{\psi}(q) \sigma_a(s) \psi(t) e^{-ix(s+t-q)} e^{-iz(p-\frac{q+t}{2})} \\
&= \int \frac{d^4p d^4q d^4s d^4t}{(2\pi)^8} \delta^4(s+t-q) \delta^4(p-\frac{q+t}{2}) g(p) \bar{\psi}(q) \lambda_a \sigma_a(s) \psi(t) \\
&= \int \frac{d^4q d^4t}{(2\pi)^8} g\left(\frac{q+t}{2}\right) \bar{\psi}(q) \sigma_a(q-t) \psi(t) \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} g\left(\frac{p+p'}{2}\right) \bar{\psi}(p) \lambda_a \sigma_a(p-p') \psi(p'), \tag{A.6}
\end{aligned}$$

donde para obtener el ultimo termino de la igualdad solo se realizó un cambio de variables mudas dentro de la integral. Otro término fermiónico de la ecuación (3.19) incluía a la interacción $\pi_a j_a^p(x)$ pero en este caso el procedimiento resulta igual que lo realizado en la ecuación (A.6) haciendo el reemplazo de σ_a por π_a y λ_a por $i\gamma_5 \lambda_a$, por lo cual no lo desarrollaremos. El término restante es el de la parte libre, que transformando Fourier nuevamente y escribiendo la delta en el espacio correspondiente resulta

$$\int d^4x, \bar{\psi}(x) (-i\cancel{\partial} - m) \psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) (\cancel{p} - m) (2\pi)^4 \delta^4(p-p') \psi(p). \tag{A.7}$$

Si juntamos todas las expresiones ya transformadas y con las deltas aplicadas, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int d^4x [\bar{\psi}(x) (i\cancel{\partial} - m) \psi(x) - \sigma_a(x) j_a^s(x) - \pi_a(x) j_a^p(x)] \\
&= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) A(p, p') \psi(p') \tag{A.8}
\end{aligned}$$

donde el operador $A(p, p')$ queda definido por

$$A(p, p') = (-\cancel{p} + m) (2\pi)^4 \delta^4(p-p') + g \left(\frac{p+p'}{2} \right) \lambda_a [\sigma_a(p-p') + i\gamma_5 \pi_a(p-p')]. \tag{A.9}$$

Si reemplazamos todo esto en el término de las integrales fermiónicas de la ecuación (3.19),

obtenemos que

$$\begin{aligned}
 & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int d^4x \left[\bar{\psi} (i\not{\partial} + m) \psi - \sigma_a j_a^s - \pi_a j_a^p \right] \right\} \\
 = & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) A(p, p') \psi(p') \right\} \\
 = & \det [A(p, p')], \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

con lo que queda resuelto todo lo que se encontraba dentro de la integral funcional de los campos fermiónicos en la función de partición.

Apéndice B

Cantidades termodinámicas para el modelo NJL-nl con superconductividad de color

En este apéndice utilizaremos la notación $d\hat{p}$ para referirnos a $p^2 dp dp_0$. Las integrales que tienen límites de cero a infinito con ese diferencial, representan integrales dobles, una en la variable p y la otra en la variable p_0 , con esos límites en los dos casos. El símbolo \oint indica que hay que calcular las integrales dobles con los límites mencionados y sumar sobre la variable c en los tres colores. Cualquier suma sobre distintos colores, o integrales sobre distintos límites se expresa explícitamente.

B.1. Granpotencial regularizado con interacción vectorial y diquarks a $T = 0$

$$\begin{aligned}\Omega = & - \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \sum_c \text{Real} \left\{ \ln \left[\frac{q_{sc}^{+2} + M_{sc}^2}{p_{sc}^2 + m_s^2} \right] \right\} \\ & - \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \sum_c \left\{ \frac{1}{2} \ln |A_c|^2 - \text{Real} \left[\ln \left(p_{uc}^{+2} + m_u^2 \right) \right] - \text{Real} \left[\ln \left(p_{dc}^{+2} + m_d^2 \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2} \left[\sum_f \left(\bar{\sigma}_f \bar{S}_f + \frac{G_S}{2} \bar{S}_f^2 + \bar{\theta}_f \bar{V}_f - \frac{G_V}{2} \bar{V}_f^2 \right) + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s + 2\bar{\Delta} \bar{D} + G_D \bar{D}^2 \right] \\ & - \sum_{f,c} \frac{\Theta(\mu_{fc} - m_f)}{24\pi^2} (-5m_f^2 + 2\mu_{fc}^2) \mu_{fc} \sqrt{\mu_{fc}^2 - m_f^2} + 3m_f^4 \ln \left(\frac{\mu_{fc} + \sqrt{\mu_{fc}^2 - m_f^2}}{m_f} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Donde

$$A_c = \left[q_{uc}^{+2} + M_{uc}^2 \right] \left[q_{dc}^{-2} + M_{dc}^{*2} \right] + (1 - \delta_{bc}) \Delta^{p2} \left[\Delta^{p2} + 2q_{uc}^+ q_{dc}^- + 2M_{uc} M_{dc}^* \right], \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} q_{fc}^\pm &= \left(\vec{p}, p_0 \mp i \left[\mu_{fc} - \bar{\theta}_f g \left(p_{fc}^\pm \right)^2 \right] \right), \\ q_{0fc}^\pm &= p_0 \mp i \left[\mu_{fc} - \bar{\theta}_f g \left(p_{fc}^\pm \right)^2 \right], \\ p_{fc}^\pm &= \left(\vec{p}, p_0 \mp i \mu_{fc} \right), \\ p_{0fc}^\pm &= p_0 \mp i \mu_{fc}, \\ M_{fc} &= m_f + \sigma_f g \left(p_{fc}^+ \right)^2, \\ \Delta^p &= \bar{\Delta} g \left(\frac{[p_{ur}^+ + p_{dr}^-]^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \mu_{ur} &= \mu_{ug} = \frac{\mu_B}{3} - \frac{2}{3} \mu_e + \frac{1}{3} \mu_8, \\ \mu_{ub} &= \frac{\mu_B}{3} - \frac{2}{3} \mu_e - \frac{2}{3} \mu_8, \\ \mu_{dr} &= \mu_{dg} = \frac{\mu_B}{3} + \frac{1}{3} \mu_e + \frac{1}{3} \mu_8, \\ \mu_{db} &= \frac{\mu_B}{3} + \frac{1}{3} \mu_e - \frac{2}{3} \mu_8, \\ \mu_{sr} &= \mu_{sg} = \mu_{dr}, \\ \mu_{sb} &= \mu_{db}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.2. Campos Auxiliares

Para las derivadas siguientes usamos que $\frac{\partial \text{Log}|A_c|^2}{\partial k} = \frac{\partial \text{Log}|A_c^* A_c|}{\partial k} = 2 \text{Real} \left(\frac{1}{A_c} \frac{\partial A_c}{\partial k} \right)$. Los campos auxiliares se obtienen minimizando el granpotencial respecto de cada campo y resolviendo dicha ecuación acoplada al sistema de ecuaciones correspondientes. Es decir, hay que considerar el campo D minimizando respecto de Δ , los campos S_i respecto de σ_i y los campos V_i respecto de θ_i . El símbolo g^Δ se define como

$$g^\Delta = \left(\frac{[p_{ur}^+ + p_{dr}^-]^2}{4} \right), \quad (\text{B.5})$$

y los resultados para los campos son

$$\bar{D} = -2 \sum_{c=r,g} \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \frac{2\Delta^{p^3} g^\Delta + \Delta^p g^\Delta (2q_{uc}^+ \cdot q_{dc}^- + 2M_{uc} M_{dc}^*)}{A_c} \right\}, \quad (\text{B.6})$$

$$S_u = -4 \oint \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \frac{M_{uc} g (p_{uc}^{+2}) [q_{dc}^{-2} + M_{dc}^{*2}] + g (p_{uc}^{+2}) (1 - \delta_{bc}) \Delta^{p^2} M_{dc}^*}{A_c} \right\}, \quad (\text{B.7})$$

$$S_d = -4 \oint \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \frac{M_{dc}^* g^* (p_{dc}^{+2}) [q_{uc}^{+2} + M_{uc}^2] + g^* (p_{dc}^{+2}) (1 - \delta_{bc}) \Delta^{p^2} M_{uc}}{A_c} \right\}, \quad (\text{B.8})$$

$$S_s = -4 \sum_{c=r,g,b} \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \frac{M_{sc} g (p_{sc}^{+2})}{q_{sc}^{+2} + M_{sc}^2} \right\}, \quad (\text{B.9})$$

$$V_u = -4 \oint \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \frac{i q_{0uc} g (p_{uc}^{+2}) [q_{dc}^{-2} + M_{dc}^{*2}] + i g (p_{uc}^{+2}) (1 - \delta_{bc}) \Delta^{p^2} q_{0dc}^-}{A_c} \right\}, \quad (\text{B.10})$$

$$V_d = -4 \oint \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \frac{-i q_{0dc} g (p_{dc}^{-2}) [q_{uc}^{+2} + M_{uc}^2] - i g (p_{dc}^{-2}) (1 - \delta_{bc}) \Delta^{p^2} q_{0uc}^+}{A_c} \right\}, \quad (\text{B.11})$$

$$V_s = -4 \sum_{c=r,g,b} \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \frac{i q_{0sc} g (p_{sc}^{+2})}{q_{sc}^2 + M_{sc}^2} \right\}, \quad (\text{B.12})$$

B.3. Densidades

Las densidades se obtienen minimizando el granpotencial respecto de cada potencial químico: $\rho_{fc} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_{fc}}$. Para cada color y sabor resultan

$$\begin{aligned} \rho_{ur} &= \rho_{ug} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left(A_c^{-1} \left\{ \left[q_{0ur}^+ \frac{\partial q_{0ur}^+}{\partial \mu_{ur}} + M_{ur} \frac{\partial M_{ur}}{\partial \mu_{ur}} \right] [(q_{dr}^-)^2 + (M_{dr}^*)^2] \right. \right. \\ &+ \Delta^2 g^\Delta \frac{\partial g^\Delta}{\partial \mu_{ur}} [\Delta^{p^2} + 2q_{ur}^+ \cdot q_{dr}^- + 2M_{ur} M_{dr}^*] \\ &+ \Delta^{p^2} \left[\Delta^2 g^\Delta \frac{\partial g^\Delta}{\partial \mu_{ur}} + \frac{\partial q_{0ur}^+}{\partial \mu_{ur}} \cdot q_{0dr}^- + \frac{\partial M_{ur}}{\partial \mu_{ur}} M_{dr}^* \right] \Big\} \\ &- \left[\frac{p_{0ur}^+ \frac{\partial p_{0ur}^+}{\partial \mu_{ur}}}{p_{ur}^{+2} + m_u^2} \right] \\ &+ \Theta(\mu_{ur} - m_u) \frac{(\mu_{ur} - m_u)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{dr} &= \rho_{dg} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left(A_c^{-1} \left\{ \left[q_{uc}^{+2} + M_{uc}^2 \right] \left[q_{0dr}^- \frac{\partial q_{0dr}^-}{\partial \mu_{dr}} + M_{dr}^* \frac{\partial M_{dr}^*}{\partial \mu_{dr}} \right] \right. \right. \\
 &+ \Delta^2 g^\Delta \frac{\partial g^\Delta}{\partial \mu_{dr}} \left[\Delta^2 + 2q_{uc}^+ q_{dr}^- + 2M_{uc} M_{dr}^* \right] \\
 &+ \left. \left. \Delta^2 \left[\Delta^2 g^\Delta \frac{\partial g^\Delta}{\partial \mu_{dr}} + q_{0uc}^+ \frac{\partial q_{0dr}^-}{\partial \mu_{dr}} + M_{uc} \frac{\partial M_{dr}^*}{\partial \mu_{dr}} \right] \right\} \right. \\
 &- \left. \left. \left[\frac{p_{0dr}^+ \frac{\partial p_{0dr}^+}{\partial \mu_{dr}}}{p_{dr}^{+2} + m_d^2} \right] \right) \right. \\
 &+ \Theta(\mu_{dr} - m_d) \frac{(\mu_{dr} - m_d)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2}
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{ub} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left(A_c^{-1} \left\{ \left[q_{0ub}^+ \frac{\partial q_{0ub}^+}{\partial \mu_{ub}} + M_{ub} \frac{\partial M_{ub}}{\partial \mu_{ub}} \right] \left[(q_{dr}^-)^2 + (M_{dr}^*)^2 \right] \right\} \right. \\
 &- \left. \left[\frac{p_{0ub}^+ \frac{\partial p_{0ub}^+}{\partial \mu_{ub}}}{p_{ub}^{+2} + m_u^2} \right] \right) \\
 &+ \Theta(\mu_{ub} - m_u) \frac{(\mu_{ub} - m_u)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2}
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{db} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left(A_c^{-1} \left\{ \left[q_{uc}^{+2} + M_{uc}^2 \right] \left[q_{0db}^- \frac{\partial q_{0db}^-}{\partial \mu_{db}} + M_{db}^* \frac{\partial M_{db}^*}{\partial \mu_{db}} \right] \right\} \right. \\
 &- \left. \left[\frac{p_{0db}^+ \frac{\partial p_{0db}^+}{\partial \mu_{db}}}{p_{db}^{+2} + m_d^2} \right] \right) \\
 &+ \Theta(\mu_{db} - m_d) \frac{(\mu_{db} - m_d)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{sr} &= \rho_{sg} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \left[\frac{q_{0sr}^+ \frac{\partial q_{0sr}^+}{\partial \mu_{sr}} + M_{sr} \frac{\partial M_{sr}}{\partial \mu_{sr}}}{q_{sr}^{+2} + M_{sr}^2} \right] - \left[\frac{p_{0sr}^+ \frac{\partial p_{0sr}^+}{\partial \mu_{sr}}}{p_{sr}^{+2} + m_s^2} \right] \right\} \\
 &+ \Theta(\mu_{sr} - m_s) \frac{(\mu_{sr} - m_s)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2}
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{sb} = & 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\hat{p}}{\pi^3} \text{Real} \left\{ \left[\frac{q_{0sb}^+ \frac{\partial q_{0sb}^+}{\partial \mu_{sb}} + M_{sc} \frac{\partial M_{sb}}{\partial \mu_{sb}}}{q_{sb}^{+2} + M_{sb}^2} \right] - \left[\frac{p_{0sb}^+ \frac{\partial p_{0sb}^+}{\partial \mu_{sb}}}{p_{sb}^{+2} + m_s^2} \right] \right\} \\
& + \Theta(\mu_{sb} - m_s) \frac{(\mu_{sb} - m_s)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Las densidades totales se obtienen de sumar en color: $\rho_f = \sum_{c=r,g,b} \rho_{fc}$. Las derivadas que aparecen son de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{0fc}^\pm}{\partial \mu_{fc}} &= \mp i \\
\frac{\partial q_{0fc}^\pm}{\partial \mu_{fc}} &= \mp i \pm i\theta_f \frac{\partial g(p_{fc}^\pm)}{\partial \mu_{fc}} \\
\frac{\partial M_{fc}}{\partial \mu_{fc}} &= \bar{\sigma}_f \frac{\partial g(p_{fc}^+)}{\partial \mu_{fc}} \\
\frac{\partial M_{fc}^*}{\partial \mu_{fc}} &= \left[\frac{\partial M_{fc}}{\partial \mu_{fc}} \right]^* \\
\frac{\partial g(p_{fc}^\pm)}{\partial \mu_{fc}} &= \pm 2ip_{0fc} \frac{g(p_{fc}^\pm)}{\Lambda^2} \\
\frac{\partial g^\Delta}{\partial \mu_{ur}} &= i \frac{2p_0 - i(\mu_{ur} - \mu_{dr})}{2\Lambda^2} g\left(\frac{[p_{ur}^+ + p_{dr}^-]^2}{4}\right) \\
\frac{\partial g^\Delta}{\partial \mu_{dr}} &= -i \frac{2p_0 - i(\mu_{ur} - \mu_{dr})}{2\Lambda^2} g\left(\frac{[p_{ur}^+ + p_{dr}^-]^2}{4}\right)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

B.4. Sistema de ecuaciones a resolver

$$\sigma_u + G_S S_u + \frac{H}{2} S_d S_s = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\sigma_d + G_S S_d + \frac{H}{2} S_s S_u = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\sigma_s + G_S S_s + \frac{H}{2} S_u S_d = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\theta_u - G_V V_u = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$\theta_d - G_V V_d = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\theta_s - G_V V_s = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\sum_{c=r,g,b} \left(\frac{2}{3} \rho_{uc} - \frac{1}{3} \rho_{dc} - \frac{1}{3} \rho_{sc} \right) - \rho_e - \rho_\mu = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$n_B - \sum_{c=r,g,b} \frac{\rho_{uc} + \rho_{dc} + \rho_{sc}}{3} = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$\Delta + G_D D = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$\sum_{f=u,d,s} (\rho_{fr} + \rho_{fg} - 2\rho_{fb}) = 0. \quad (\text{B.29})$$

B.5. Granpotencial Regularizado Con interacción vectorial y diquarks a T finita

$$\begin{aligned} \Omega = & - 2T \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\pi^3} \sum_c \text{Real} \left\{ \ln \left[\frac{q_{snc}^{+2} + M_{snc}^2}{p_{snc}^2 + m_s^2} \right] \right\} \\ & - 2T \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\pi^3} \sum_c \left\{ \frac{1}{2} \ln |A_{nc}|^2 - \text{Real} \left[\ln \left(p_{unc}^{+2} + m_u^2 \right) \right] - \text{Real} \left[\ln \left(p_{dnc}^{+2} + m_d^2 \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2} \left[\sum_f \left(\bar{\sigma}_f \bar{S}_f + \frac{G_S}{2} \bar{S}_f^2 + \bar{\theta}_f \bar{V}_f - \frac{G_V}{2} \bar{V}_f^2 \right) + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s + 2\bar{\Delta} \bar{D} + G_D \bar{D}^2 \right] \\ & - T \int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\pi^3} \sum_{f,c} \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{E_f - \mu_{fc}}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{E_f + \mu_{fc}}{T}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Donde

$$A_{nc} = \left[q_{unc}^{+2} + M_{uc}^2 \right] \left[q_{dnc}^{-2} + M_{dnc}^{*2} \right] + (1 - \delta_{bc}) \Delta^{p2} \left[\Delta^{p2} + 2q_{unc}^+ \cdot q_{dnc}^- + 2M_{unc} M_{dnc}^* \right] \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned}
w_n &= (2n+1)\pi T \\
q_{fnc}^\pm &= \left(\vec{p}, w_n \mp i \left[\mu_{fc} - \bar{\theta}_f g \left(p_{fnc}^\pm \right)^2 \right] \right) \\
q_{0fnc}^\pm &= w_n \mp i \left[\mu_{fc} - \bar{\theta}_f g \left(p_{fnc}^\pm \right)^2 \right] \\
p_{fnc}^\pm &= \left(\vec{p}, w_n \mp i \mu_{fc} \right) \\
p_{0fnc}^\pm &= w_n \mp i \mu_{fc} \\
M_{fnc} &= m_f + \sigma_f g \left(p_{fnc}^\pm \right)^2 \\
\Delta^p &= \bar{\Delta} g \left(\frac{[p_{unr}^+ + p_{dnr}^-]^2}{4} \right) \\
E_f &= \sqrt{p^2 + m_f^2}
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Las densidades se obtienen de hacer las mismas derivadas que antes. Sin embargo es fácil ver que en el término de las exponenciales del granpotencial en la ecuación (B.30) el único índice de color es el de los potenciales químicos. Por lo cual las densidades a temperatura finita serán las mismas que a temperatura cero realizando el reemplazo

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(w_n - i\mu, \mathbf{p}). \tag{B.33}$$

y cambiando el término $\Theta(\mu_{f,c} - m_f)$ por la derivada correspondiente del término exponencial. Debido a que es una derivada sencilla, e incluir las densidades completas nuevamente a temperatura finita tiene una escritura muy parecida a la mostrada a temperatura cero, obviaremos escribirlas de manera explícita. Del mismo modo, los campos auxiliares D , S_i y V_i , no incluyen al término exponencial, el cual viene de la parte libre. Por lo tanto su escritura resulta exactamente igual que a temperatura nula, realizando dicho reemplazo.

Bibliografía

- [1] Orsaria, M. G., Malfatti, G., Mariani, M., Ranea-Sandoval, I. F., García, F., Spinella, W. M., *et al.* Phase transitions in neutron stars and their links to gravitational waves. *J. Phys.*, **G46** (7), 073002, 2019. [1](#), [3](#), [10](#), [19](#), [54](#)
- [2] Demorest, P., Pennucci, T., Ransom, S., Roberts, M., Hessels, J. Shapiro Delay Measurement of A Two Solar Mass Neutron Star. *Nature*, **467**, 1081–1083, 2010. [1](#), [88](#)
- [3] Antoniadis, J., *et al.* A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, **340**, 6131, 2013. [1](#), [88](#)
- [4] Fonseca, E., *et al.* The NANOGrav Nine-year Data Set: Mass and Geometric Measurements of Binary Millisecond Pulsars. *Astrophys. J.*, **832** (2), 167, 2016. [1](#)
- [5] Abbott, B. P. e. a. Gw170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, **121**, 161101, Oct 2018. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.161101>. [1](#), [10](#), [90](#)
- [6] Schneider, A. S., Horowitz, C. J., Hughto, J., Berry, D. K. Nuclear “pasta” formation. *Phys. Rev. C*, **88**, 065807, Dec 2013. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.88.065807>. [2](#)
- [7] Bodek, A., Breidenbach, M., Dubin, D. L., Elias, J. E., Friedman, J. I., Kendall, H. W., *et al.* Comparisons of deep-inelastic $e - p$ and $e - n$ cross sections. *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1087–1091, May 1973. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1087>. [2](#)
- [8] Weber, F. Strange quark matter and compact stars. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **54** (1), 193 – 288, 2005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641004001061>. [2](#)

- [9] Gross, D. J., Wilczek, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1343–1346, Jun 1973. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>. 2
- [10] Politzer, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1346–1349, Jun 1973. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>. 2
- [11] Ma, Y.-Q., Qiu, J.-W. Exploring Partonic Structure of Hadrons Using ab initio Lattice QCD Calculations. *Phys. Rev. Lett.*, **120** (2), 022003, 2018. 3
- [12] Muroya, S., Nakamura, A., Nonaka, C., Takaishi, T. Lattice QCD at Finite Density*): An Introductory Review. *Progress of Theoretical Physics*, **110** (4), 615–668, 10 2003. URL <https://doi.org/10.1143/PTP.110.615>. 3
- [13] Aggarwal, M. M., *et al.* An Experimental Exploration of the QCD Phase Diagram: The Search for the Critical Point and the Onset of De-confinement, 2010. 4
- [14] Abgrall, N., *et al.* NA61/SHINE facility at the CERN SPS: beams and detector system. *JINST*, **9**, P06005, 2014. 4
- [15] Ripka, G. Quarks bound by chiral fields: The quark-structure of the vacuum and of light mesons and baryons. Oxford University Press, Oxford, UK, 1997. 4
- [16] Nambu, Y., Jona-Lasinio, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II. *Phys. Rev.*, **124**, 246–254, 1961. [,141(1961)]. 4, 25
- [17] Schmidt, S., Blaschke, D., Kalinovsky, Y. L. Scalar-pseudoscalar meson masses in nonlocal effective qcd at finite temperature. *Phys. Rev. C*, **50**, 435–446, Jul 1994. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.50.435>. 5
- [18] Polyakov, A. Thermal properties of gauge fields and quark liberation. *Physics Letters B*, **72** (4), 477 – 480, 1978. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269378907372>. 5
- [19] Svetitsky, B. Symmetry aspects of finite-temperature confinement transitions. *Physics Reports*, **132** (1), 1 – 53, 1986. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157386900141>. 5

- [20] Broniowski, W., Golli, B., Ripka, G. Solitons in nonlocal chiral quark models. *Nuclear Physics A*, **703** (3), 667 – 701, 2002. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947401016700>. 5
- [21] Contrera, G. A., Dumm, D. G., Scoccola, N. N. Nonlocal $su(3)$ chiral quark models at finite temperature: The role of the polyakov loop. *Phys. Lett. B*, **661** (2â3), 113 – 117, 2008. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269308001421>. 5, 54
- [22] Glendenning, N. K. Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity. 1997. 7, 76, 77, 78
- [23] Bodmer, A. R. Collapsed nuclei. *Phys. Rev.*, **D4**, 1601–1606, 1971. 7, 17
- [24] Witten, E. Cosmic Separation of Phases. *Phys. Rev.*, **D30**, 272–285, 1984. 7, 17
- [25] Alcock, C., Farhi, E., Olinto, A. Strange stars. *Astrophys. J.*, **310**, 261–272, 1986. 7
- [26] Benvenuto, O. G., Horvath, J. E. On the structure of strange stars and bagged QCD parameters. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **241**, 43, 1989. 7
- [27] Chakrabarty, S., Sahu, P. K. Effect of magnetic field on the strange star. *Phys. Rev.*, **D53**, 4687–4690, 1996. 7
- [28] Alford, M. G. Color superconducting quark matter. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **51**, 131–160, 2001. 7
- [29] Buballa, M. Njl-model analysis of dense quark matter. *Physics Reports*, **407** (4â6), 205 – 376, 2005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730400506X>. 7, 91
- [30] Flores, C. V., Lugones, G. Discriminating hadronic and quark stars through gravitational waves of fluid pulsation modes. *Class. Quant. Grav.*, **31**, 155002, 2014. 8
- [31] Becerra-Vergara, E. A., Mojica, S., Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A. Anisotropic Quark Stars with an Interacting Quark Equation of State. *Phys. Rev.*, **D100** (10), 103006, 2019. 8
- [32] Jiménez, J. C., Fraga, E. S. Radial oscillations of quark stars from perturbative qcd. *Phys. Rev. D*, **100**, 114041, Dec 2019. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.114041>. 8

- [33] Sotani, H., Maruyama, T., Tatsumi, T. Shear oscillations in the hadron - quark mixed phase. *Nuclear Physics A*, **906**, 37 – 49, 2013. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037594741300359X>. 8
- [34] Lugones, G., Grunfeld, A. G., Ajmi, M. A. Surface tension and curvature energy of quark matter in the nambu–jona-lasinio model. *Phys. Rev. C*, **88**, 045803, Oct 2013. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.88.045803>. 8
- [35] Zampieri, L., Campana, S., Turolla, R., Chierigato, M., Falomo, R., Fugazza, D., *et al.* 1rxs j214303.7+065419/rbs 1774: a new isolated neutron star candidate. *Astron. Astrophys.*, **378**, L5, 2001. 8
- [36] Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., Collins, R. A. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, **217**, 709–713, 1968. 8
- [37] On the theory of stars. En: D. T. HAAR (ed.) Collected Papers of L.D. Landau, págs. 60 – 62. Pergamon, 1965. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080105864500134>. 9
- [38] Chadwick, J. Possible Existence of a Neutron. *Nature*, **129**, 312, 1932. 9
- [39] Baade, W., Zwicky, F. Remarks on super-novae and cosmic rays. *Phys. Rev.*, **46**, 76–77, Jul 1934. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.46.76.2>. 9
- [40] Oppenheimer, J. R., Volkoff, G. M. On Massive neutron cores. *Phys. Rev.*, **55**, 374–381, 1939. 9
- [41] Tolman, R. C. Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, **55**, 364–373, Feb 1939. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364>. 9
- [42] Most, E. R., Weih, L. R., Rezzolla, L., Schaffner-Bielich, J. New constraints on radii and tidal deformabilities of neutron stars from gw170817. *Phys. Rev. Lett.*, **120**, 261103, Jun 2018. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.261103>. 10
- [43] Pereira, J. P., Flores, C. V., Lugones, G. Phase transition effects on the dynamical stability of hybrid neutron stars. *Astrophys. J.*, **860** (1), 12, 2018. 10
- [44] Prakash, M., Lattimer, J. M., Pons, J. A., Steiner, A. W., Reddy, S. Evolution of a neutron star from its birth to old age. *Lect. Notes Phys.*, **578**, 364–423, 2001. [364(2000)]. 13, 100

- [45] Steiner, A., Prakash, M., Lattimer, J. M. Quark-hadron phase transitions in young and old neutron stars. *Phys. Lett.*, **B486**, 239–248, 2000. [14](#)
- [46] Cameron, A. G. Neutron Star Models. *ApJ*, **130**, 884, Nov 1959. [15](#)
- [47] Ambartsumyan, V. A., Saakyan, G. S. The Degenerate Superdense Gas of Elementary Particles. *azh*, **37**, 193, 1960. [15](#)
- [48] Bombaci, I. The Hyperon Puzzle in Neutron Stars. *JPS Conf. Proc.*, **17**, 101002, 2017. [16](#)
- [49] Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B., Weisskopf, V. F. A New Extended Model of Hadrons. *Phys. Rev.*, **D9**, 3471–3495, 1974. [17](#)
- [50] Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B. Baryon Structure in the Bag Theory. *Phys. Rev.*, **D10**, 2599, 1974. [17](#)
- [51] Farhi, E., Jaffe, R. L. Strange Matter. *Phys. Rev.*, **D30**, 2379, 1984. [17](#)
- [52] Alford, M. G. Color superconductivity and the strange quark. *AIP Conf. Proc.*, **806** (1), 293–302, 2006. [PoSJHW2005,002(2006)]. [18](#)
- [53] Weber, F. Strange quark matter and compact stars. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **54**, 193–288, 2005. [18](#)
- [54] Chen, H., Burgio, G. F., Schulze, H. J., Yasutake, N. Structure of the hadron-quark mixed phase in protoneutron stars. *Astron. Astrophys.*, **551**, A13, 2013. [21](#)
- [55] Orsaria, M. and Rodrigues, H. and Weber, F. and Contrera, G. A. Quark deconfinement in high-mass neutron stars. *Phys. Rev. C*, **89**, 015806, Jan 2014. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.89.015806>. [25](#)
- [56] Parappilly, M. B., Bowman, P. O., Heller, U. M., Leinweber, D. B., Williams, A. G., Zhang, J. B. Scaling behavior of the quark propagator in full qcd. *Phys. Rev. D*, **73**, 054504, Mar 2006. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.054504>. [25](#)
- [57] Itzykson, C., Zuber, J. B. Quantum Field Theory. International Series In Pure and Applied Physics. New York: McGraw-Hill, 1980. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.2916419>. [25](#)
- [58] Nambu, Y. Quasiparticles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, **117**, 648–663, 1960. [132(1960)]. [27](#)

- [59] 't Hooft, G. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle. *Phys. Rev. D*, **14**, 3432–3450, Dec 1976. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.3432>. 27
- [60] 't Hooft, G. Symmetry breaking through bell-jackiw anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 8–11, 1976. 28
- [61] 't Hooft, G. On the Phase Transition Towards Permanent Quark Confinement. *Nucl. Phys.*, **B138**, 1–25, 1978. 29, 46, 48
- [62] Buballa, M. NJL model analysis of quark matter at large density. *Phys. Rept.*, **407**, 205–376, 2005. 30, 53, 64
- [63] Rößner, S., Ratti, C., Weise, W. Polyakov loop, diquarks, and the two-flavor phase diagram. *Phys. Rev. D*, **75**, 034007, Feb 2007. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.034007>. 39
- [64] Pathria, R. K. Statistical Mechanics. Butterworth-Heinemann, 1996. 39, 63
- [65] Polyakov, A. M. Quark Confinement and Topology of Gauge Groups. *Nucl. Phys.*, **B120**, 429–458, 1977. 46, 48
- [66] Wilson, K. G. Confinement of Quarks. *Phys. Rev.*, **D10**, 2445–2459, 1974. 46
- [67] Pisarski, R. D. Notes on the deconfining phase transition. En: QCD perspectives on hot and dense matter. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Summer School, Cargese, France, August 6-18, 2001, págs. 353–384. 2002. 48
- [68] Roessner, S., Hell, T., Ratti, C., Weise, W. The chiral and deconfinement crossover transitions: PNJL model beyond mean field. *Nucl. Phys.*, **A814**, 118–143, 2008. 49
- [69] Dumitru, Adrian and Pisarski, Robert D. and Zschiesche, Detlef. Dense quarks, and the fermion sign problem, in a $SU(N)$ matrix model. *Phys. Rev. D*, **72**, 065008, Sep 2005. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.065008>. 49
- [70] Elze, H. T., Miller, D. E., Redlich, K. Gauge Theories at Finite Temperature and Chemical Potential. *Phys. Rev.*, **D35**, 748, 1987. 49
- [71] Fukushima, K., Hidaka, Y. A Model study of the sign problem in the mean-field approximation. *Phys. Rev.*, **D75**, 036002, 2007. 49

- [72] Rößner, S. and Ratti, C. and Weise, W. Polyakov loop, diquarks, and the two-flavor phase diagram. *Phys. Rev. D*, **75**, 034007, Feb 2007. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.034007>. 49
- [73] Abuki, H., Ciminale, M., Gatto, R., Nardulli, G., Ruggieri, M. Enforced neutrality and color-flavor unlocking in the three-flavor Polyakov-loop NJL model. *Phys. Rev.*, **D77**, 074018, 2008. 49
- [74] Gomez Dumm, D., Blaschke, D. B., Grunfeld, A. G., Scoccola, N. N. Color neutrality effects in the phase diagram of the PNJL model. *Phys. Rev.*, **D78**, 114021, 2008. 49
- [75] Carlomagno, J. P. and Gómez Dumm, D. and Scoccola, N. N. Deconfinement and chiral restoration in nonlocal SU(3) chiral quark models. *Phys. Rev. D*, **88**, 074034, Oct 2013. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.074034>. 50
- [76] Asakawa, M., Yazaki, K. Chiral Restoration at Finite Density and Temperature. *Nucl. Phys.*, **A504**, 668–684, 1989. 51
- [77] Klimt, S., Lutz, M. F. M., Weise, W. Chiral phase transition in the SU(3) Nambu and Jona-Lasinio model. *Phys. Lett.*, **B249**, 386–390, 1990. 51
- [78] Buballa, M. The Problem of matter stability in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Nucl. Phys.*, **A611**, 393–408, 1996. 51, 74
- [79] Evans, N. J., Hsu, S. D. H., Schwetz, M. An Effective field theory approach to color superconductivity at high quark density. *Nucl. Phys.*, **B551**, 275–289, 1999. 51
- [80] Schafer, T., Wilczek, F. High density quark matter and the renormalization group in QCD with two and three flavors. *Phys. Lett.*, **B450**, 325–331, 1999. 51
- [81] Schaefer, T., Shuryak, E. V. Instantons in QCD. *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 323–426, 1998. 51
- [82] Tandy, P. C. Hadron physics from the global color model of QCD. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **39**, 117–199, 1997. 51
- [83] Ebert, D., Reinhardt, H. Effective Chiral Hadron Lagrangian with Anomalies and Skyrme Terms from Quark Flavor Dynamics. *Nucl. Phys.*, **B271**, 188–226, 1986. 51
- [84] Klimt, S., Lutz, M. F. M., Vogl, U., Weise, W. Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model. Part 1. Mesonic modes. *Nucl. Phys.*, **A516**, 429–468, 1990. 51

- [85] Contrera, G. A. and Dumm, D. Gómez and Scoccola, Norberto N. Meson properties at finite temperature in a three flavor nonlocal chiral quark model with Polyakov loop. *Phys. Rev. D*, **81**, 054005, Mar 2010. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.054005>. 54
- [86] Tanabashi, M., *et al.* Review of Particle Physics. *Phys. Rev.*, **D98** (3), 030001, 2018. 54
- [87] Philipsen, O. The QCD equation of state from the lattice. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **70**, 55–107, 2013. 56
- [88] Borsanyi, S., Fodor, Z., Hoelbling, C., Katz, S. D., Krieg, S., Szabo, K. K. Full result for the QCD equation of state with 2+1 flavors. *Phys. Lett.*, **B730**, 99–104, 2014. 56
- [89] Bellwied, R., Borsanyi, S., Fodor, Z., Günther, J., Katz, S. D., Ratti, C., *et al.* The QCD phase diagram from analytic continuation. *Phys. Lett.*, **B751**, 559–564, 2015. 56
- [90] Bazavov, A., *et al.* The chiral and deconfinement aspects of the QCD transition. *Phys. Rev.*, **D85**, 054503, 2012. 56
- [91] Aoki, Y., Borsanyi, S., Durr, S., Fodor, Z., Katz, S. D., Krieg, S., *et al.* The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II. *JHEP*, **06**, 088, 2009. 56
- [92] Bazavov, A., Brambilla, N., Ding, H. T., Petreczky, P., Schadler, H. P., Vairo, A., *et al.* Polyakov loop in 2+1 flavor QCD from low to high temperatures. *Phys. Rev.*, **D93** (11), 114502, 2016. 56
- [93] Fukushima, K. Critical surface in hot and dense QCD with the vector interaction. *Phys. Rev.*, **D78**, 114019, 2008. 57
- [94] Randrup, Jørgen. Phase transition dynamics for baryon-dense matter. *Phys. Rev. C*, **79**, 054911, May 2009. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.79.054911>. 58
- [95] Randrup, Jørgen. Spinodal phase separation in relativistic nuclear collisions. *Phys. Rev. C*, **82**, 034902, Sep 2010. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.82.034902>. 58

- [96] Bardeen, J., Cooper, L. N., Schrieffer, J. R. Microscopic theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, **106**, 162, 1957. [63](#)
- [97] Rischke, D. H. The Quark gluon plasma in equilibrium. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **52**, 197–296, 2004. [63](#)
- [98] Blaschke, D. B., Gomez Dumm, D., Grunfeld, A. G., Klahn, T., Scoccola, N. N. Hybrid stars within a covariant, nonlocal chiral quark model. *Phys. Rev.*, **C75**, 065804, 2007. [64](#)
- [99] Alford, M. G., Rajagopal, K., Wilczek, F. Color flavor locking and chiral symmetry breaking in high density QCD. *Nucl. Phys.*, **B537**, 443–458, 1999. [65](#)
- [100] Fritzsche, H., Gell-Mann, M., Leutwyler, H. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys. Lett.*, **47B**, 365–368, 1973. [65](#)
- [101] Shahrbafe, M., Blaschke, D., Grunfeld, A. G., Moshfegh, H. R. First-order phase transition from hypernuclear matter to deconfined quark matter obeying new constraints from compact star observations, 2019. [72](#)
- [102] Blaizot, J. P., Berger, J. F., Decharge, J., Girod, M. Microscopic and macroscopic determinations of nuclear compressibility. *Nucl. Phys.*, **A591**, 435–457, 1995. [75](#)
- [103] Vretenar, D., Wandelt, A., Ring, P. Isoscalar dipole mode in relativistic random phase approximation. *Phys. Lett.*, **B487**, 334–340, 2000. [75](#)
- [104] Serot, B. D. Quantum hadrodynamics. *Rept. Prog. Phys.*, **55**, 1855–1946, 1992. [75](#)
- [105] Bodmer, A. R., Price, C. E. Relativistic mean field theory for nuclei. *Nucl. Phys.*, **A505**, 123–144, 1989. [75](#)
- [106] Fuchs, C., Lenske, H., Wolter, H. H. Density dependent hadron field theory. *Phys. Rev. C*, **52**, 3043–3060, Dec 1995. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.52.3043>. [76](#)
- [107] Typel, S., Ropke, G., Klahn, T., Blaschke, D., Wolter, H. H. Composition and thermodynamics of nuclear matter with light clusters. *Phys. Rev.*, **C81**, 015803, 2010. [76](#), [81](#), [83](#)
- [108] Weber, F., Negreiros, R., Rosenfield, P., Stejner, M. Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **59**, 94–113, 2007. [77](#)

- [109] Typel, S., Wolter, H. H. Relativistic mean field calculations with density dependent meson nucleon coupling. *Nucl. Phys.*, **A656**, 331–364, 1999. [77](#)
- [110] Lalazissis, G. A., Nikšić, T., Vretenar, D., Ring, P. New relativistic mean-field interaction with density-dependent meson-nucleon couplings. *Phys. Rev. C*, **71**, 024312, Feb 2005. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.71.024312>. [77](#)
- [111] Typel, S. Relativistic model for nuclear matter and atomic nuclei with momentum-dependent self-energies. *Phys. Rev.*, **C71**, 064301, 2005. [77](#)
- [112] Glendenning, N. K., Moszkowski, S. A. Reconciliation of neutron star masses and binding of the lambda in hypernuclei. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 2414–2417, 1991. [80](#)
- [113] Costa, R. S., Cortes, M. R., Nunes, D. R., Batista, A. S. A. Nuclear matter properties in the non-linear Walecka model at finite temperature with interaction between the σ - ω mesons. *AIP Conf. Proc.*, **1625** (1), 212–218, 2015. [81](#)
- [114] Drago, A., Lavagno, A., Pagliara, G., Pigato, D. Early appearance of Λ isobars in neutron stars. *Phys. Rev.*, **C90** (6), 065809, 2014. [81](#)
- [115] Spinella, W. M., Weber, F., Orsaria, M. G., Contrera, G. A. Neutrino Emissivity in the Quark-Hadron Mixed Phase. *Universe*, **4** (5), 64, 2018. [81](#), [83](#)
- [116] Rijken, T. A., Nagels, M. M., Yamamoto, Y. Baryon-baryon interactions - nijmegen extended-soft-core models. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **185**, 14–71, 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1143/PTPS.185.14>. [81](#)
- [117] Kajantie, K., Karkkainen, L., Rummukainen, K. Tension of the interface between two ordered phases in lattice $su(3)$ gauge theory. *Nuclear Physics B*, **357** (2), 693 – 712, 1991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139190486H>. [87](#)
- [118] Lynch, R. S., *et al.* The Green Bank Telescope 350 MHz Drift-scan Survey II: Data Analysis and the Timing of 10 New Pulsars, Including a Relativistic Binary. *Astrophys. J.*, **763**, 81, 2013. [88](#)
- [119] Arzoumanian, Z., *et al.* The NANOGrav 11-year Data Set: High-precision timing of 45 Millisecond Pulsars. *Astrophys. J. Suppl.*, **235** (2), 37, 2018. [88](#)
- [120] McLerran, L., Pisarski, R. D. Phases of cold, dense quarks at large $N(c)$. *Nucl. Phys.*, **A796**, 83–100, 2007. [89](#)

- [121] Baym, G., Hatsuda, T., Kojo, T., Powell, P. D., Song, Y., Takatsuka, T. From hadrons to quarks in neutron stars: a review. *Rept. Prog. Phys.*, **81** (5), 056902, 2018. [89](#)
- [122] Alford, M., Braby, M., Paris, M. W., Reddy, S. Hybrid stars that masquerade as neutron stars. *Astrophys. J.*, **629**, 969–978, 2005. [89](#), [95](#)
- [123] Pons, J. A., Reddy, S., Prakash, M., Lattimer, J. M., Miralles, J. A. Evolution of protoneutron stars. *Astrophys. J.*, **513**, 780, 1999. [92](#)
- [124] Prakash, M., Bombaci, I., Prakash, M., Ellis, P. J., Lattimer, J. M., Knorren, R. Composition and structure of protoneutron stars. *Physics Reports*, **280** (1), 1 – 77, 1997. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157396000233>. [94](#), [95](#)
- [125] Brown, G. E., Bethe, H. A Scenario for a large number of low mass black holes in the galaxy. *Astrophys. J.*, **423**, 659, 1994. [95](#)
- [126] Vidana, I., Bombaci, I., Polls, A., Ramos, A. Microscopic study of neutrino trapping in hyperon stars. *Astron. Astrophys.*, **399**, 687–693, 2003. [95](#)

